Wortel drie bij Archimedes, in citaten

september '95
(versie 2, juli 2000)

Paul Tempelaar

Inhoud

Met dank aan Gerrit L. de Bruin voor inspiratie, interactie en interpunctie.

De kwadratuur van de cirkel

Over de bron van de diverse antieke wiskundige culturen is niet veel met zekerheid te zeggen. Het lijkt waarschijnlijk dat een aantal tradities een gemeenschappelijke oorsprong hebben. Zo komt het gebruik van overeenkomstige meetkundige technieken en stellingen (zoals de stelling van Pythagoras) voor in de Indische, Chinese, Egyptische, Babylonische en Griekse tradities van voor 300 v.Chr. B.L. van der Waerden gaat in zijn *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (1983) uit van

> *... an oral tradition of geometrical constructions, a tradition which existed already in the Neolithic Age in Western Europe, and which was continued by the Egyptian cord-stretchers and the Hindu-ritualists. [...]*
> *... the oral tradition of the cord-stretchers, who were experts in geometrical constructions with ritual applications. They were active in the British Isles, in Egypt and in India. [...]*
> *... from India we have the Brahmanas and Sulvasutras, in which altar constructions by means of stretched cords are described in great detail, with proofs. From the close connection between Greek and Hindu traditions concerning geometrical altar constructions, we may conclude that the development of these constructions took place in the realm of Indo-European languages. I suppose that oral traditions existed long before the rules were written down in the Sulvasutras.*

De indruk bestaat dat de wiskunde ten tijde van de mondelinge overlevering een religieuze inslag heeft, en niet alleen praktische maar ook rituele doelen dient. In een aantal oude culturen staat de cirkel hierbij symbool voor het goddelijke. Het vierkant is aards volmaakt, maar de cirkel is hemels volmaakt. Aan het aardse volmaakte mogen de mensen zich nog wagen, het hemelse is echter voor enkeling weggelegd, een hogepriester of een heilige. In veel oude culturen fungeren rituele voorschriften als intermediair tussen de hemel en de aarde. In de zojuist genoemde *Sulbasutras*[1] treffen we onder andere voorschriften aan voor het bouwen van cirkelvormige altaren. Het vormt een neerslag van eeuwenlange rituele tradities.
Tegen de achtergrond van het bovenstaande zou het kwadreren van de cirkel symbool kunnen zijn voor de geleidelijke ontmythologisering van de Westerse wereld.

Wat van de goden afkomstig is, is vaak door toedoen van halfgoden tot de mens gekomen. Prometheus heeft het vuur uit de smidse van Hephaistos gestolen en aan de mensen gegeven. Theseus was de stichter van Athene en heeft volgens de overlevering de samenleving het hoogste goed gebracht wat ze volgens sommigen ooit heeft gekregen: de democratie. De functie van de halfgoden in de Griekse mythologie is een beeldende metafoor voor de ontwikkeling van het menselijke bewustzijn tot aan de opbloei van de Griekse stadstaten. De mens gaat de mogelijkheid ontdekken om met zijn eigen ratio het irrationele, het ondoorgrondelijke, te benaderen. Hij meent de mogelijkheid ontdekt te hebben om door te dringen tot het fascinerende privé-domein van de goden.

In de zesde eeuw v.Chr. verschijnt volgens de geschiedschrijving een markante figuur ten tonele in de zich net ontwikkelende Griekse wereld: Pythagoras van Samos. Naar verluidt verblijft hij een groot deel van zijn leven in Croton (Zuid-Italië). Hij houdt zich onder andere met getallen bezig. Omdat het nageslacht aan hem en de zijnen een verrassend nieuw gedachtegoed heeft toegeschreven, waaronder een aantal cruciale wiskundige vondsten, is hij tot de status van een halfgod gerezen. Iets aan Pythagoras toeschrijven kan echter weinig meer historische betekenis hebben dan het feit aangeven dat die kennis rond 600 v.Chr. reeds voor handen was.

---

[1]Een onderdeel van de Indiase *Brahmanas*, vroeg Vedische geschriften uit ca. 800 v.Chr.
Sutras zijn een soort gecomprimeerde verzen, en *sulba* betekent zoiets als 'ritueel voorschrift', maar ook 'koord'.

Niet zozeer die ene beroemde stelling maakt hem tot een halfgod. Mensen kunnen heel goed leven met het idee dat alles getal is. Het wordt pas echt menens wanneer de onderlinge onmeetbaarheid van grootheden aan de Olympus ontstolen wordt. Nu is het hek van de dam in de lager gelegen kustgebieden van Zuid-Europa. Mensen van vlees en bloed komen in actie. Eudoxos komt met de leer der verhoudingen om de crisis van het irrationale te omzeilen. Euclides stelt de dan aanwezige kennis te boek in een zodanige vorm dat er een fundament ontstaat waarop de mathematische geest kan bouwen, omhoog naar de hemel. In de loop der tijd verschijnt er nog een halfgod: Archimedes van Syracuse. Hij laat zijn tijdgenoten zien met welk speels gemak de menselijke geest de ladder naar de mathematische hemel kan bestijgen.

Terug naar de cirkel. In een iets andere zienswijze is de speurtocht naar de kwadratuur van de cirkel een van de vele voorbeelden van de masculiene aard van de Westerse samenleving. Deze samenleving krijgt al vorm in het patriarchale en door de rede beheerste Athene, in de tijd dat mythe en realiteit zich van elkaar scheidden. In de leer der archetypen van C.G. Jung is de cirkel een symbool van het vrouwelijke spirituele aspect van het collectieve onbewuste. De rechthoek en het vierkant in het bijzonder symboliseren het aardse mannelijke.
Het streven om de cirkel te kwadreren is een van de grote impulsen in de ontwikkeling van de wiskunde geweest. Dat dit uiteindelijk een vergeefs streven is geweest, is wellicht op te vatten als een metafoor. Het bovennatuurlijke, zo je wilt vrouwelijke spirituele, laat zich nu eenmaal niet onderwerpen. Je kunt het onbeheersbare niet beheersen, het onnoembare niet benoemen en het irrationale niet rationaliseren.
Voor zover mij bekend hebben wiskundigen zich nauwelijks met het probleem bezig gehouden vanuit het idee van de circulatuur van de rechthoek. Dit komt overigens wel voor in de eerder genoemde *Sulbasutras*. De kwadratuur van de cirkel heeft daarentegen bijna alle wiskundigen van naam als een worst voor de neus gehangen, en het waren allemaal mannen.

Van Archimedes is weinig met zekerheid te zeggen, behalve bijvoorbeeld dat hij een man was en zich in zijn *Cirkelmeting* grondig met genoemde kwadratuur heeft ingelaten. Door een cirkel in te klemmen tussen een in- en een omgeschreven veelhoek blijkt hij in staat om de verhouding van het ronde en het rechte getalsmatig te benaderen tussen rationale grenzen. Het gaat wat ver om hierbij een persoonlijke poging te veronderstellen om vat te krijgen op vrouwelijke en spirituele. Over vrouwen in Archimedes' leven weten we eigenlijk niets, evenmin over zijn religieuze leven. In *Het Leven van Marcellus* van de geschiedschrijver Plutarchus, die overigens pas drie eeuwen later leefde, lezen we dat het beoefenen van de wiskunde voor Archimedes een uitzonderlijke bekoring had:

> *Voortdurend betoverd door een hem vergezellende Sirene, vergat hij zich te voeden en liet hij de verzorging van zijn lichaam na; en wanneer hij, zoals dikwijls geschiedde, met dwang naar bad en zalving werd gedreven, tekende hij nog geometrsiche figuren in de as, en met de vinger trok hij lijnen op zijn gezalfde lichaam, bezeten als hij was door een grote verrukking en in waarheid een gevangene der Muzen.*

Misschien was hij evenals een aantal grote wiskundigen van later datum zo door de koningin der wetenschappen bezeten, dat deze zijn leven meer kleurde dan enige vrouw van vlees en bloed. De verleidelijke maar conflictvolle Aphrodite moest het bij hem afleggen tegen de rationele en scherpzinnige Pallas Athene. Misschien heeft Archimedes ook niet zo'n boodschap gehad aan de rituele toepassingen van religieuze lijntrekkers. Volgens de geschiedschrijving was hij zijn tijd ver vooruit in zijn aardse bezigheden zoals het construeren van werktuigen en wapentuig.

Archimedes stierf volgens de overlevering - legende met een tikkeltje geschiedenis - in het harnas. Terwijl Syracuse in 212 v.Chr. door de Romeinen onder Marcellus ingenomen werd, zat de bejaarde wijsgeer in het zand een stelling te bewijzen. Het vooruitzicht dat de stelling onbewezen zou blijven vreesde hij meer dan het doodvonnis, dat door een kleingeestige Romeinse soldaat voltrokken werd. Archimedes zou stervende gezegd hebben: "Ze hebben me mijn lichaam ontnomen, maar ik zal mijn geest meenemen".
William Dunham schrijft in zijn prachtige *Journey through Genius*:

> *Thus ended the life of Archimedes. He died as he had lived, lost in thought about his beloved mathematics. We can regard him either as a martyr to his research or as a victim of his own preoccupied mind. In any case, mathematicians may come and mathematicians may go, but no other has had an end quite like this.*

Veel van zijn wiskundige inzichten vervlogen met zijn laatste levensadem. Het wiskundige werk dat we heden ten dage aan Archimedes toeschrijven, bestaat slechts voor een deel uit oorspronkelijk werk van zijn hand. Daarnaast bezitten we vertalingen (o.a. in het Arabisch, Hebreeuws en Latijn), waarschijnlijk ook bewerkt, brieven en commentaren. De bekendste van deze commentatoren leefden pas eeuwen later: Heroon van Alexandrië (1^{e} eeuw na Chr.), Pappus van Alexandrië en Theon van Alexandrië (4^{e} eeuw) en Eutocius van Ascalon (5^{e} eeuw). Heroon, Pappus en Theon maken melding van meer werk dan we nu kennen. Het vermoeden bestaat dat een en ander in 391 verloren is gegaan bij een brand die de tempel van Serapis in Alexandrië verwoest heeft. Ook de bijbehorende bibliotheek, waarin veel werk van Archimedes verzameld schijnt te zijn, ging in rook op.

Over oplossingen en bewijzen in een aantal fragmenten van zijn werk tasten we in het duister. Zo is de oplossing van het beroemde probleem over de grazende koeien van Helios niet overgeleverd. Het feit dat pas in 1981 dit probleem met een supercomputer opgelost is, doet overigens vermoeden dat Archimedes zelf de oplossing ook niet kende. Voor het opvullen van een andere leemte in zijn overgeleverde wiskunde zal zelfs een supercomputer niet toereikend zijn. In de eerder genoemde *Cirkelmeting* komt zonder bewijs een uitdrukking voor die we in moderne termen een benadering van $\sqrt{3}$ noemen. Het is niet bekend hoe Archimedes een rationale benadering voor deze irrationaliteit gevonden heeft. Een speurtocht naar een mogelijke verklaring aan de hand van citaten van historici is het onderwerp van dit opstel.

De cirkel, het volmaakt ronde, is nog twee millennia na Archimedes' dood een van de grootste verleidsters in de haakse wiskunde geweest, en een valkuil. Pas in 1882, als de wiskunde naast een stevig fundament ook over verfijnde precisiewerktuigen beschikt zoals de infinitesimaalrekening en de complexe rekenwijze maakt C.L.F. Lindemann een einde aan de eeuwenlange zoektocht naar de kwadratuur door te bewijzen dat we voor het rechtlijnig doorgronden van het volmaakt ronde - tegenwoordig ordinair uitgedrukt in een irrationale verhouding, het getal π - de aardse wiskunde moeten transcenderen. Het wiskundige bouwwerk is nu hoog genoeg om de hemel te bereiken, maar die hemel blijkt daar niet te zijn.

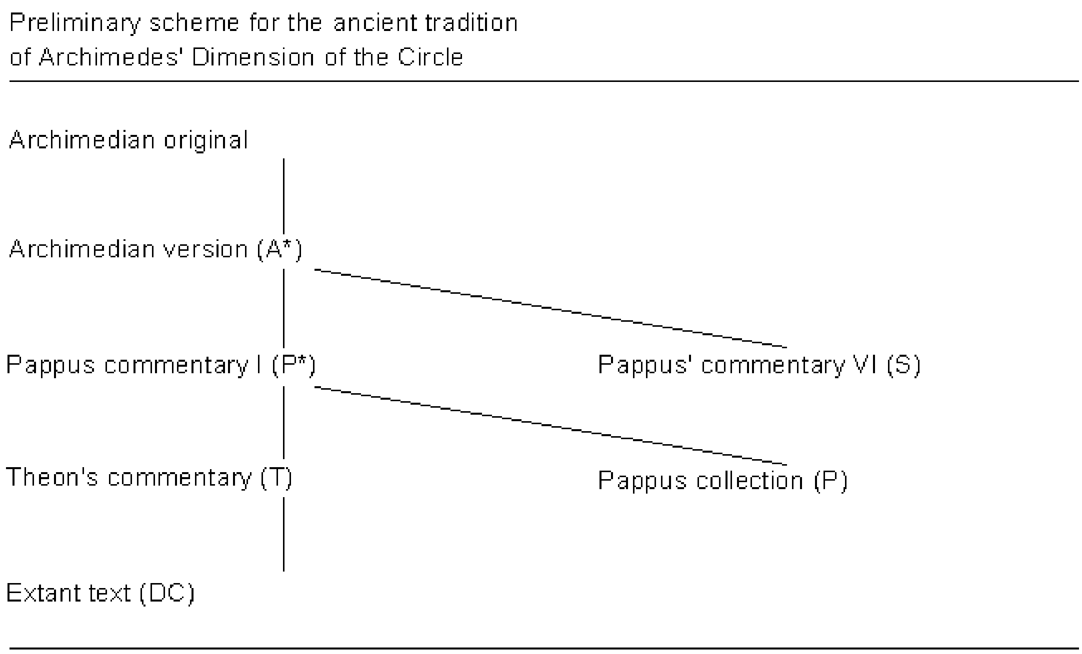
Het probleem in de Cirkelmeting

Over de *Cirkelmeting* schrijft E.J. Dijksterhuis in zijn boek *Archimedes* (1938[2]):

> *As appears both from its language, from which all traces of the Siculo-Dorian dialect[3] have vanished, and from the argumentation, which is scrappy and rather careless, it has not come down to us in its original form. It is quite possible that the fragment we possess formed part of a longer work, which is quoted by Pappus under the title 'On the Circumference of the Circle', [...] and that the latter also dealt with the more general question of the ratio between the length of an arc of a circle and that of its chord.*

In zijn *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* toont Wilbur R. Knorr een schema met daarin de vermoedelijke ontwikkeling van de nog bestaande Griekse tekst van de *Cirkelmeting*.
Hij schrijft erbij:

> *To summarize, T and P derive from Pappus' lost version P*, itself based on a lost Archimede-*



> *an source A*; S appears to draw on the same source A*.* [4]

---

[2]De citaten zijn afkomstig uit een engelstalige uitgave van 1987. Een deel van deze uitgave verscheen in 1938 als nederlandstalig boek *Archimedes*. Het overige is in de vorm van losse artikelen verschenen in het tijdschrift *Euclides*.

[3]Het Dorische dialekt, waarin Archimedes al zijn werk geschreven heeft.

[4]Het met P aangegeven werk is het standaardwerk van Pappus, zijn *Synagoge* (Verzameling) uit ca. 320 n.Chr., waarin hij de belangrijkste Griekse wiskunde tot dan toe weergeeft. Werk van o.a. Euclides, Archimedes en Apollonius, ook werk waarvan het origineel verloren is gegaan. Daarnaast vermeldt hij eigen bewijzen en belangwekkende eigen vondsten.
Het werk S is Pappus' stelling over cirkelsectoren.

The extant Greek text of DC is a condensation, somehow based on T. Among earlier writers Zenodorus[5] and Hero know the theorem [S] in a version in the line of A, as of course also do Pappus and Theon. Later writers, most notably Eutocius, are familiar with the extant DC. But even here subtle variations indicate the existence of an alternative form, in the immediate line of DC, but prior to it. [...]*
We have thus narrowed the interval within which DC was composed: it must be later than Theon's commentary on Ptolemy[6], that is after the middle of the 4th century, yet well enough established by the early part of the 6th century as to be treated by Eutocius as Archimedes' form of the circle theorem. Among the commentators known from this period are Theon himself and his daughter Hypatia[7]. [...]

Hij vervolgt:
Thus, I will not now attempt to make any claim stronger than the possibility of Hypatia's involvement in the composition of DC, ...

Er is dus geen origineel handschrift van *de Cirkelmeting* overgebleven, maar een mogelijk bewerkte Griekse versie, vermoedelijk ergens uit de vijfde eeuw n.Chr.

De overgeleverde Griekse tekst bestaat uit drie proposities, met bewijzen:

I. *De oppervlakte van een willekeurige cirkel is gelijk aan die van een rechthoekige driehoek waarvan één van de rechthoekszijden gelijk is aan de straal, en de ander gelijk aan de omtrek van de cirkel.*

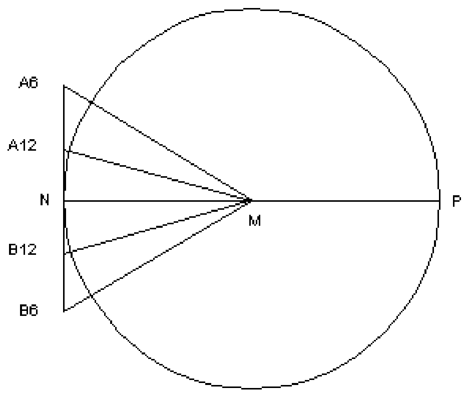
II. *De oppervlakte van een cirkel verhoudt zich tot het vierkant op zijn diameter als 11 tot 14.*

III. *De omtrek van een willekeurige cirkel is gelijk aan drie maal de diameter, plus maximaal één zevende en minimaal tien éénenzeventigste deel van de diameter.*

In het bewijs van de derde propostitie vergelijkt Archimedes de omtrek van de cirkel met die van een omgeschreven en een ingeschreven regelmatige veelhoek.

Laat $S_n = A_nB_n$ de zijde zijn van een omgeschreven regelmatige n-hoek van een cirkel met straal 1. Dan is met behulp van de bissectrice-stelling af te leiden dat

$$S_{2n} = \frac{S_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}}$$



---

[5]Van Zenodorus (ca. 180 v.Chr.) is vermoedelijk de st
figuren die een even groot (buiten-)oppervlak hebben, de bol het grootste volume heeft.

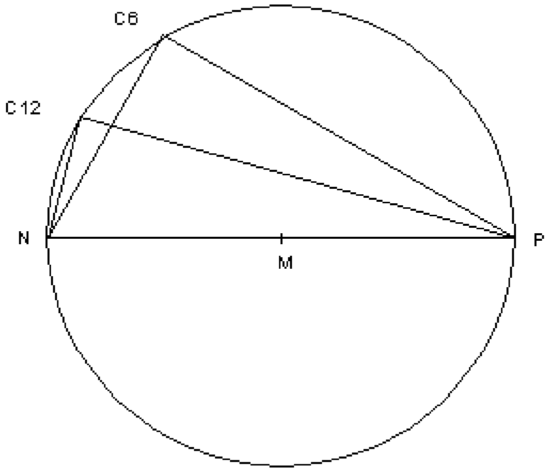
[6]Claudius Ptolemeus (begin 2e eeuw n.Chr.) schreef verhandelingen over optica, geografie, goniometrie en sterrenkunde, waaronder de beroemde *Mathematikè Syntaxis*. We kennen dit werk nu als de *Almagest*.

[7]Hypatia (eind 3e eeuw n.Chr.), wijsgerige o.a. op het gebied van wis- en sterrenkunde, een lerares met een zeer welluidende stem en volgens tijdgenoten een indrukwekkende uitzondering in de Helleense mannenwereld. Ze schreef commentaren op het werk van Apollonius en Diophantus. Ze werd op gruwelijke wijze door fanatieke christenen vermoord.

Modern weergegeven is dit de procedure waarmee Archimedes uiteindelijk de omtrek van de omgeschreven regelmatige 96-hoek bepaald heeft. Hiertoe startte hij met een regelmatige zeshoek. Het segment A_6B_6M hiervan is een gelijkzijdige driehoek. Dijksterhuis in *Archimedes*:

> *Without any comments he* [Archimedes] *puts*

$(MN\ ,\ NA_6) = (\overline{\sigma\xi\varepsilon}\ ,\ \overline{\rho\nu\gamma})\quad (265 : 153)$ [8]



Hier treffen we Archimedes' onderbenadering van √3 aan.

Voor de zijde van een ingeschreven regelmatige n-hoek van een cirkel met straal 1 is af te leiden:

$$S_{2n} = NC_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

Ook hier is een regelmatige zeshoek het startpunt. In de *Cirkelmeting* komt dan de bovenbenadering voor: $(PC_6\ ,\ NC_6) = (\overline{,\alpha\tau\nu\alpha}\ ,\ \overline{\psi\pi})\qquad (1351 : 780)$

Zoals blijkt uit al zijn werken, is Archimedes zuinig met het geven van uitleg.
Ik citeer B.L. van der Waerden, die T. Heath citeert, die op zijn beurt Plutarchus en J. Wallis citeert met betrekking tot de summiere uitleg van Archimedes in zijn geschriften[9].

> *De geschriften zijn, zonder uitzondering, monumenten van wiskundige uiteenzetting: de geleidelijke onthulling van de opzet, de meesterlijke ordening van de stellingen, de strenge uitschakeling van alles wat niet onmiddelijk van belang is voor het doel, de volkomenheid van het geheel, dit alles maakt in zijn volmaaktheid zo'n sterke indruk, dat in de geest van de lezer een gevoel van onbegrensd ontzag ontstaat.*
> *Het is als Plutarchos zegt: "Het is niet mogelijk in de meetkunde moeilijker vraagstukken of*

---

[8]Dijksterhuis gebruikt voor verhoudingen de notatie met haakjes. De letters van de hoekpunten in de figuur komen overigens niet overeen met hetgeen hij in zijn boek *Archimedes* gebruikt.
Ten tijde van Archimedes worden voor de weergave van getallen de letters van het alfabet gebruikt:

$$\overline{\alpha} = 1\ ,\ \overline{\beta} = 2\ ,\ \overline{\gamma} = 3\ ,\ \textit{enz.}$$
$$\overline{\iota} = 10\ ,\ \overline{\kappa} = 20\ ,\ \overline{\lambda} = 30\ ,\ \textit{enz.}$$
$$\overline{\rho} = 100\ ,\ \overline{\sigma} = 200\ ,\ \overline{\tau} = 300\ ,\ \textit{enz.}$$

Getallen boven de duizend hebben er een klein kommaatje voor staan en de getallen worden samengesteld. Getallen boven de 10.000 laten we even buiten beschouwing. Zo geldt er bijvoorbeeld: $\overline{\pi\varepsilon} = 85\ ,\ \overline{,\zeta\varphi\xi\theta} = 6569$

[9]B.L. van der Waerden: *Ontwakende Wetenschap*,
T. Heath: *History of Greek Mathematics, vol II*,
Plutarchus (ca. 50-100): *Het leven van Marcellus*,
J. Wallis (1616-1703): *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical*.

bewijzen te vinden die in eenvoudiger en duidelijker theorema's uiteengezet worden". Daarbij blijft de weg, waarlangs hij zijn resultaten vond, in een waas van mysterie gehuld. Want het is duidelijk, dat zij niet ontdekt zijn door de stappen, die in de voltooide handelingen tot het bewijs leiden. Als er alleen de meetkundige verhandelingen waren, zou het schijnen, alsof Archimedes, zoals Wallis zegt, "als met opzet alle sporen van zijn onderzoekingen had uitgewist, alsof hij de nakomelingschap het geheim van zijn methode van onderzoek niet gunde, maar wel de erkenning van de juistheid der resultaten wilde afdwingen". En inderdaad (weer met de woorden van Wallis) "niet alleen Archimedes, maar bijna alle Ouden verborgen hun methode van analyse (al is het duidelijk, dat zij er een hadden) zozeer voor de nakomelingschap, dat de nieuwere mathematici het gemakkelijker vonden een nieuwe analyse uit te vinden dan de oude weer te vinden".

Hoe is Archimedes aan zijn rationale onder- en bovenbenadering van de irrationaliteit $\sqrt{3}$ gekomen? In de volgende paragrafen zullen een aantal historici ons als gids bij de hand - bij de neus, zo u wilt - nemen in een zoektocht naar een antwoord op deze vraag. Het uiteindelijke doel van deze zoektocht is waarschijnlijk onhaalbaar. De enige ware deskundige, Archimedes zelf, heeft zijn laatste adem reeds lang uitgeblazen. Hopelijk is de tocht zelf de moeite waard.

De benadering van wortel 3 bij Archimedes

Wat zegt de literatuur?

Eutocius van Ascalon, in zijn kommentaar op de Cirkelmeting van Archimedes:

> *Hoe men echter de vierkante wortel, die een gegeven getal zeer dicht benadert, kan vinden is door Heroon in zijn meetkundige werken getoond, evenals door Pappus, Theoon en verscheidene andere exegeten van het grote overzicht van Claudius Ptolemaeus. Het is daarom niet nodig om onderzoek naar dit onderwerp te doen, daar de vrienden van de wiskunde het daarin kunnen natrekken.*

In de *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* van Moritz Cantor (Band I, 1907) staat:

> *Archimed hat in seiner Kreismessung eine ganz Anzahl von Angenäherten Quadratwürzeln berechnen müssen. Er hat dabei erkannt, daß* $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ *, [...].*
>
> *Wie hat er diese Zahlen gefunden? Die Frage ist vielfach aufgeworfen, verschiedentlich beantwortet worden. Man kann wohl sagen, daß sämtliche Versuche in einem Punkte zusammentreffen, nämlich in dem Bestreben, ein mehr oder weniger bewußtes Zusamment-reffen der Methode des Archimedes mit dem modernen Kettenbruchverfahren nachzuweisen, d. h. mit den Formeln*

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{\cdots}}}}$$

> *[...] .*

Na een aantal overwegingen komt Cantor tot de conclusie:

> *Wir lassen also die Frage nach der Art und Weise, in welcher Archimed seine Quadratwurzeln fand, offen, soviel zugestehend, daß bestimmte Beispiele auf Anwendung von Kettenbruchformeln bei anderen Schrifstellern hinweisen, die somit jener Formeln sich bedient haben werden, wenn auch natürlich nicht als Kettenbrüche, an deren Vorhandensein nicht zu denken ist, bevor eine Schreibweise der Brüche durch räumlich unterschiedbare Zähler und Nenner sich verbreitet hatte.*

Sir Thomas Heath schrijft in zijn *History of Greek Mathematics* (vol II, 1921):

[...] and the calculation starts from a greater and a lesser limit to the value of √3, which Archimedes assumes without remark as known, namely

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

How did Archimedes arrive at these particular approximations? No puzzle has exercised more fascination upon writers interested in the history of mathematics. De Lagny, Mollweide, Buzengeiger, Hauber, Zeuthen, P Tannery, Heilermann, Hultsch, Hunrath, Wertheim, Bobynin: these are the names of some of the authors of different conjectures. The simplest supposition is certainly that of Hunrath and Hultsch, who suggested that the formula used was

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$

where a^2 is the nearest square number above or below $a^2 \pm b$, as the case may be. The use of the first part of this formula by Heron, who made a number of such approximations, is proved by a passage in his Metrica, where a rule equivalent to this is applied to √720; the second part of the formula is used by the Arabian Akharkhi (eleventh century) who drew from Greek sources, and one approximation in Heron may be obtained in this way. Another suggestion (that of Tannery and Zeuthen) is that the successive solutions in integers in the equations

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1 \\ x^2 - 3y^2 = -2 \end{cases}$$

may have been found in a similar way to those of the equations $x^2 - 2y^2 = +1$ *given by Theon of Smyrna*[10] *after the Pythagoreans. The rest of the suggestions amount for the most part to the use of the method of continued fractions more or less disguised.*

De formule van Hunrath en Hultsch duikt meer op, bijvoorbeeld bij Morris Kline in zijn *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1972).

Boyer, a *History of Mathematics* (1968):

*His (*Archimedes*) method for computing square roots, in finding the perimeter of the circum-scribed hexagon, and for the geometric means was similar to that used by the Babylonians.*

B.L. van der Waerden in *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (1983):

How did Archimedes obtain his limits for the ratio [...] ? Historians of mathematics have made several conjectures to answer this question. In my opinion the most interesting papers are:

1) *P. Tannery: Sur la mesure du cercle d' Archimède [...].*
2) *C. Müller: Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von √3? [...]*
3) *O. Toeplitz: Bemerkungen zu der vorstehende Arbeit von Conrad Müller [...].*

---

[10]Theon van Smyrna (2^e eeuw n.Chr.). In een van zijn werken, dat bekend staat onder de Latijnse naam *Expositio Rerum Mathematoricum*, komen de zogenaamde zijde- en diagonaalgetallen voor in samenhang met kwadratische vergelijkingen, soms ook wel Pell-vergelijkingen genoemd.
Modern genoteerd $x^2 - 2y^2 = +1$.

Vervolgens geeft van der Waerden in het kort aan waar de suggesties in de genoemde artikelen op neerkomen. Van Tannery is dat al naar voren gekomen in het hiervoor vermelde citaat van Heath. Over het artikel van Müller schrijft hij:

> *In paper 2), Müller has derived a general rule for obtaining lower and upper bounds for square roots √D, which leads in three steps to the bounds for √3 given by Archimedes. The principle of Müller's method is:*
>
> *If a and b are both upper or both lower bounds for √D, then* $c = \frac{ab+D}{a+b}$ *is an upper bound. If a is a lower and b is an upper bound, c is a lower bound.*

In artikel 3) toont de schrijver aan dat de methode van Müller in feite neer komt op een algoritme dat gebruikt kan worden om de eerder genoemde kwadratische vergelijkingen (zoals $x^2 - 2y^2 = \pm 1$) op te lossen.

Het moge uit voorgaande teksten duidelijk zijn geworden dat erkende historische autoriteiten diverse pogingen hebben gedaan om tot een reconstructie van Archimedes' gedachtegang in deze te komen.
Een aantal geopperde suggesties zullen in het vervolg van dit opstel wat nauwkeuriger bekeken worden:

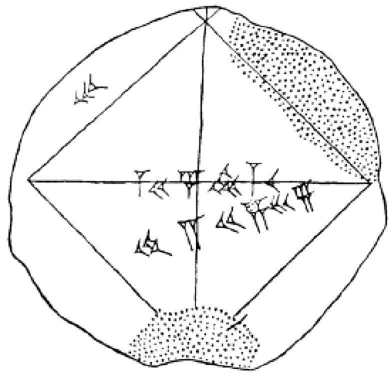
1. de mogelijke link met Babylonisch benaderen van wortels,
2. de formule, die door Hunrath en Hultsch voorgesteld is en een mogelijke meetkundige achtergrond hiervan,
3. de kettingbreuk, waar alle geopperde suggesties min of meer op uitdraaien,
4. de Pell-achtige vergelijkingen, die gesuggereerd zijn door Tannery en Zeuthen, en in samenhang hiermee de formule geopperd door Müller,
5. de zijde- en diagonaalgetallen, die we o.a. aantreffen in het werk van Theon van Smyrna.

Met de literatuur die over die ene √3 is geschreven zou met gemak een boekenkast te vullen zijn. Er is slechts een beperkte groep deskundigen en hun werk geraadpleegd. Al met al is het toch een bont geheel en begeef ik me ver van de oorspronkelijke bron. Müller schrijft over een vermoeden betreffende Archimedes, Toeplitz schrijft over het vermoeden van Müller, van der Waerden beschouwt het commentaar van Toeplitz en ik citeer van der Waerden.
Daarom nog een opmerking van E.J. Dijksterhuis in zijn *Elementen van Euclides* (1929). Zijn waarschuwing betreft weliswaar de onduidelijkheid omtrent de pré-Euclidische wiskunde, maar de opmerking zou met evenzoveel recht betrekking kunnen hebben op de onbekendheid met de Griekse benadering van wortels.

> *De groote schaarste aan betrouwbare berichten over de Grieksche wiskunde in de vijfde eeuw* [voor Chr]*, gepaard aan het bijna volkomen ontbreken van mathematische verhandelingen uit dien tijd, heeft de historici der mathesis er toe gedwongen, om ter beantwoording van talrijke historische vragen, waartoe de beschouwing van het systeem der Euclidische Meetkunde aanleiding geeft, hun toevlucht te nemen tot het opstellen van hypothesen; ze hebben hieraan groote energie en bewonderenswaardige scherpzinnigheid ten koste gelegd en ze zijn er in enkele gevallen dan ook in geslaagd, in onderlinge overeenstemming voorstellingen van den gang van zaken te vormen, die hoewel door geen enkele ondubbelzinnige bewijsplaats gesteund, niettemin door inwendige consequentie en uitwendigen samenhang met langs andere weg verkregen inzichten zoo overtuigend werken, dat ze thans wel algemeen als historische waarheid worden aanvaard.*
> *In tal van andere gevallen echter is noch die onderlinge overeenstemming, noch die overtuigende werking bereikt en bij de beschouwing van de vele tegenstrijdige opvattingen, die men op de meest fundamenteele punten ontmoet, is men wel eens geneigd te vragen, of niet menigmaal de resignatie van het "Ignoramus"* [we hebben geen idee] *de voorkeur zou verdienen boven de weelde om, waar we heelemaal niets met zekerheid weten, aan de phantasie den vrijen teugel te laten.*

Wortels in Mesopotamië

Uit M. Kline, *Mathematical Thougt from Ancient to Modern Times*:



The Babylonians also had tables expressing squares, square roots, cubes, and cube roots. When the root was a whole number it was given exactly. For other roots, the corresponding sexagesimal numbers were only approximate.
Of course, irrationals cannot be expressed in a finite number of decimals or sexagesimals. However, there is no evidence that the Babylonians were aware of this. They might well have believed that the irrationals could be converted exactly to sexagesimal numbers if more places were used. An excellent Babylonian approximation to $\sqrt{2}$ *gives*
$\sqrt{2}$ *= 1,41421 instead of 1.414214....*
Roots occur in their calculations of the diagonal d of a rectangle of height h and width w. One problem asks for the diagonal of a rectangular gate with given height and width. The answer is given

$$d \simeq h + \frac{w^2}{2h}$$

without explanation and amounts to using the approximate formula for the diagonal d, namely,
The formula is a good approximation to d for h > w.
Thus for h > w, as in the case of one problem, we can see that the answer is reasonable by noting that

$$d = \sqrt{h^2+w^2} = h.\sqrt{1+\frac{w^2}{h^2}} = h.(1+\frac{w^2}{h^2})^{\frac{1}{2}}$$

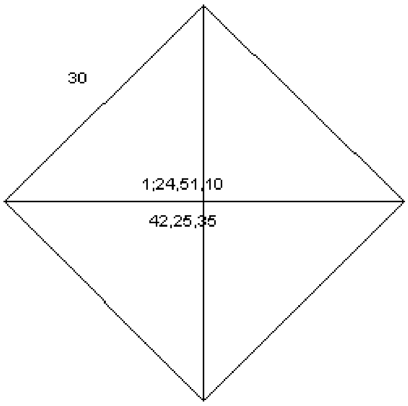
If we now expand the binomial and retain only the first two terms we get the formula. Other approximate answers to square-root problems were given obtained presumably by using numbers in Babylonian tablets.

Bovenstaand kleitablet (YBC 7289) is hiernaast iets minder cryptisch weergegeven.
De betekenis van de cijfers[11]:

$$30 \rightarrow \frac{30}{60} \quad (= \frac{1}{2} = 0{,}5)$$

$$1;24,51,10 \rightarrow 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \quad (= 1\frac{8947}{21600} = 1{,}414212963)$$

$$42,25,35 \rightarrow \frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3} \quad (= \frac{30547}{43200} = 0{,}707106481)$$



Het gaat hier om een vierkant met zijde ½. De lengte van de diagonaal is gevraagd. De Babyloniers schijnen bekend te zijn geweest met een procedure om wortels te berekenen.

In Boyer, *a History of Mathematics*, lezen we:

> *The effectiveness of Babylonian computation did not result from their system of numeration alone. Mesopotamian mathematicians were skillful in developing algorithmic procedures, among which was a square-root process often ascribed to later men. It sometimes is attributed to the Greek scholar Archytas (428-365 B.C.) or to Heron of Alexandria (ca. 100); occasionally one finds it called Newton's algorithm. This Babylonian procedure is as simple as effective. Let $x=\sqrt{a}$ be the root desired and let a_1 be a first approximation to this root; let a second approximation b_1 be found from the equation $b_1 = a/a_1$. If a_1 is too small, then b_1 is too large, and vice versa. Hence the arithmetic mean $a_2 = ½(a_1 + b_1)$ is a plausible next approximation. Inasmuch as a_2 is always too large, the next approximation $b_2 = a/a_2$ will be too small, and one takes the arithmetic mean $a_3 = ½(a_2 + b_2)$ to obtain a still better result[12]; the procedure can be continued indefinitely. The value of $\sqrt{2}$ on Yale table 7289 will be found to be that of a_3, where $a_1 = 1;30$. In the Babylonian square-root algorithm one finds an iterative procedure that could have put the mathematicians of the time in touch with infinite processes, but scholars of the time did not pursue the implications of such problems.*
> *The algorithm just described is equivalent to a two term approximation to the binomial series, a case with which the Babylonians were familiar. If $\sqrt{a^2+b}$ is desired, the approximation $a_1 = a$ leads to $b_1 = (a^2 + b)/a$ and $a_2 = (a_1 + b_1)/2 = a + b/2a$, which is in agreement with the first two terms in the expansion of $(a^2 + b)^{½}$ and provides an approximation found in old Babylonian texts.*

Overigens is de opmerking van Boyer "*The value of $\sqrt{2}$ on Yale table 7289 will be found to be that of*

---

[11]Wellicht ten overvloede zij vermeld dat in die tijd in Mesopotamië het 60-tallig stelsel gebruikt werd.

[12]Als $a_n.b_n=a$ ($a_n>0$ en $b_n>0$) dan geldt altijd $\frac{1}{2}(a_n+b_n) \geq \sqrt{a_n b_n}$ ofwel $(a_n-b_n)^2 \geq 0$.

Conclusie: iedere $a_{n+1}=½(a_n+b_n)$ is altijd een bovenbenadering van $\sqrt{a}$ en iedere $b_{n+1} = \frac{a}{a_{n+1}}$ is een onderbenadering.

a_3*, where* a_1 *= 1;30*" ietwat misleidend, aangezien op de tablet een vierkant met zijde ½ staat afgebeeld.
Het is echter bekend dat de Babyloniërs volop gebruik maakten van tabellen om het omgekeerde van de belangrijkste natuurlijke getallen te bepalen. De omgekeerden van getallen als 7 en 11 ontbreken hierin, omdat hun omgekeerden in het zestigtallig stelsel eindeloos voortlopende breuken zijn.
Maar, aldus Boyer:

> *at one point, however, a Mesopotamian scribe seems to give upper and lower bounds for the reciprocal of the irregular number 7, placing it between 0;8,34,16,59 and 0;8,34,18.*

Van belang bij dit voorbeeld is ook het feit dat hierbij een boven- èn onderbenadering worden gegeven.

Met zojuist genoemde uitleg valt nog geen verband te leggen tussen Archimedes' benadering van √3 en de methoden in Mesopetamië, zoals Boyer suggereert (pag. 11). Met de tot nu toe besproken methode zijn de grenzen 265/153 en 1351/780 niet te verkrijgen. Opvallend detail is echter wel dat Boyer het in dezelfde zin ook heeft over 'the geometric means'[13]
Dit brengt ons op het spoor van de suggestie van C. Henry. In *History of Continued fractions and Padé Approximations* (1991) schrijft C. Brezinsky:

> *As shown by C. Henry in 1879, these bounds* [de onder- en bovengrens van Archimedes' benadering] *can be obtained by using the arithmetical and geometrical means of 1 and 3 and the mediation rule stating that (a+c)/(b+d) is located between a/b and c/d if a,b,c and d are positive.*
> *The arithmetical and geometrical means of 1 and 3 are respectively 2 and 3/2. Theirs means are 7/4 and 12/7 and the new means are 97/56 and 168/97. The mediation of these values is 265/153.*
> *Taking now the mediation of 2 and 3/2, we get 5/3 and their geometrical mean is 9/5* [14]*. Their means are 26/15 and 45/26. Finally, the arithmetical means of these last values is 1351/780.*

Het lijkt vrij onwaarschijnlijk dat Archimedes zich van deze methode bediend heeft. De methode verloopt niet erg logisch. Er zit geen regelmaat in het toepassen van de gemiddelden en de tussenliggende. Belangrijker is het echter dat de breuk ten tijde van Archimedes een ondergeschikte rol speelde, vergeleken bij de rol die hij in het oude Mesopetamië speelde. De notatiewijze van getallen was gunstig voor breuken tussen Eufraat en Tigris. In het Griekenland van Archimedes was het weergeven van breuken iets problematischer gezien het feit dat voor getallen bepaalde letters

---

[13]Bedoeld wordt hier niet het meetkundig maar het harmonisch gemiddelde van a en b: $\frac{2ab}{a+b}$.

Dit is te beschouwen als de zijde van een rechthoek met oppervlakte *ab*, waarvan de andere zijde het rekenkundige gemiddelde van *a* en *b* is.
Arithmetisch komt het overeen met een aantal stappen uit het Babylonische worteltrekken. Als *a* de eerste benadering is van $\sqrt{ab}$, dan geldt achtereenvolgens (in de geest van de tekst van Boyer):

$$a_1 = a \quad , \quad b_1 = b \quad , \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(a+b) \quad en \quad b_2 = \frac{2ab}{a+b} \quad .$$

[14]Deze passage is wat duister. Misschien wordt bedoeld: 9/5 als tussenliggende (*mediation*) van 4/2 (=2) en 5/3.

van het alfabet werden genomen[15]. Maar meer nog speelde daar het begrip verhouding een centrale rol, zodat de breuk ook eigenlijk minder noodzakelijk was[16]. De breuk 265/153 bij de Babyloniërs is dikwijls de verhouding 265 staat tot 153 bij de Grieken.

Dijksterhuis (*Archimedes*) is vrij positief over de mogelijkheid dat Archimedes zich in het algemeen van Babylonische technieken bediend heeft, als het gaat om worteltrekken:

> *It now appears that the vast majority of all the approximations to square roots occurring in Archimedes and Heron can be accounted for quite naturally by the application of this Babylonian rule. [...]*
> *Now the exact application of the rule usually yields much more complicated fractions; Archimedes however succeeds in avoiding these by rounding off [...] in a suitable way, so that the rest of the calculation is considerably simplified.*

Zoals we gezien hebben zijn de waarden 265/153 en 1351/780 niet direkt met de bewuste regel te vinden. De laatste waarde is echter met een iets afwijkende startwaarde wel te vinden. Dijksterhuis:

> *We are now coming to the more special question how Archimedes can have arrived at the two rational approximations* $\frac{265}{153}$ *and* $\frac{1351}{780}$ *for* $\sqrt{3}$*. It is natural to find out whether they can be obtained by means of the Babylonian rule. This is quite easy for the value* $\frac{1351}{780}$*, if we start from* $\frac{5}{3}$ *as the first approximation. The following values are then successively found:*

$$\alpha_1 = \frac{5}{3}, \quad \beta_1 = \frac{9}{5} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right) = \frac{26}{15}$$
$$\alpha_2 = \frac{26}{15}, \quad \beta_2 = \frac{45}{26} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) = \frac{1351}{780}$$

> *The starting point* $\frac{5}{3}$*, however, cannot be found by this method, but it may be imagined as determined on the strength of the discovery that 27, whose square root is three times* $\sqrt{3}$*, is close to the square of 5. From* $27 \sim 5^2$ *it then follows that* $\sqrt{3} \sim \frac{5}{3}$ *.*

[15]Eenheidsbreuken worden weergegeven door de noemer met een accent. Breuken worden in het algemeen in woorden weergegeven of als sommen of meervouden van eenheidsbreuken.

$$\delta' = \frac{1}{4}, \quad \zeta\varepsilon' = \frac{1}{75}, \quad \overline{\sigma\xi\varepsilon}\ \rho\nu\gamma' = \frac{265}{153}$$

[16]Pas bij Diophantus van Alexandrië (ca. 250 na Chr.) wordt de breuk geheel als zelfstandig fenomeen gebruikt. Diophantus is een buitenbeentje in de Griekse wiskunde. Hij wordt vaak beschouwd als een gehelleniseerde Babyloniër, gezien het feit dat zijn werk zuiver aritmetisch is.

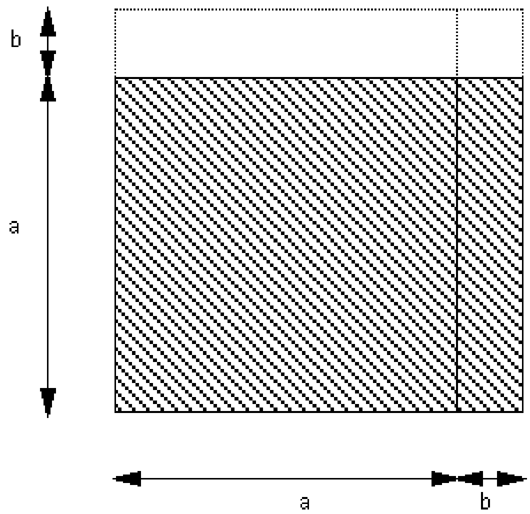
Een meetkundige benadering en een formule

Een eenvoudige meetkundige benadering om te beginnen.
Van het grote vierkant hiernaast is de rechthoek bovenaan afgenomen. Van het resterende gearceerde deel is de oppervlakte: $a^2 + ab$.

Uit de figuur is eenvoudig de volgende afschatting van deze oppervlakte te maken: $a^2 < a^2 + ab < (a+b)^2$.

Ook wel:

$$a < \sqrt{a^2+ab} < a+b \qquad .....(1)$$



Hiermee kan de numerieke waarde van wortels benaderd worden. Als voorbeeld de wortel van 3.
Begin met een ruime afschatting, $a=1$ en $b=2$.
Dit levert $1 < \sqrt{3} < 3$.
Vervolgens kan de afschatting wat minder ruim genomen worden, bijvoorbeeld door nu voor a het gemiddelde van de zojuist gevonden waarden te nemen: $a=2$.

Uit $\quad a^2+ab = 3 \quad .....(2) \quad$ volgt dan: $b=-½$.

Uitdrukking (1) levert nu incorrect:

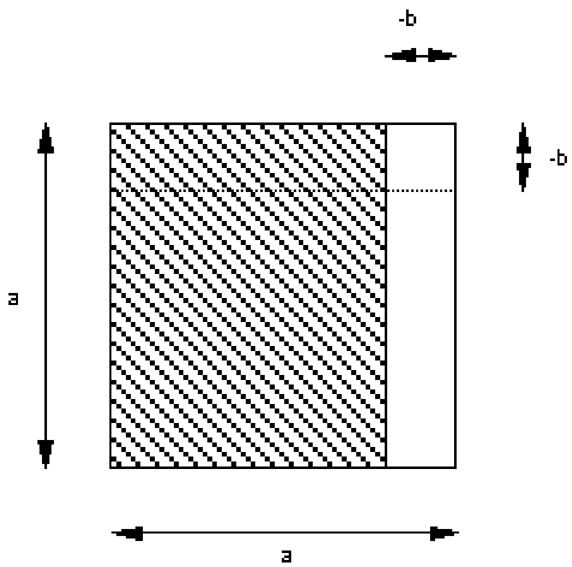
$$2 < \sqrt{3} < 1½$$

Blijkbaar behoeft een negatieve uitkomst van b uit (2) een andere uitdrukking om de wortel af te schatten.
Een negatieve waarde van b kan aanschouwelijk gemaakt worden met een iets andere figuur, zoals hiernaast.
Als bijbehorende ongelijkheid is uit deze figuur af te leiden:

$$a+b < \sqrt{a^2+ab} < a \qquad .....(3)$$

De afschatting van $\sqrt{3}$ wordt hiermee:

$$1\tfrac{1}{2} < \sqrt{3} < 2 \quad .$$



We kunnen deze afschatting verder verfijnen door nu weer voor a het gemiddelde van 1½ en 2 te nemen, en hiermee met (2) de volgende waarde van b te berekenen.

De nu beschreven methode komt overeen met de Babylonische manier van worteltrekken.

Met $D = a^2+ab$, $a_n = a+b$ en $b_n = a$ wordt (1) $\quad b_n < \sqrt{D} < a_n \quad$ en met $a_n = a$ en $b_n = a+b$ wordt (3) hetzelfde.

De eerstvolgende bovenbenadering wordt $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n) = a+\frac{b}{2} \quad$.

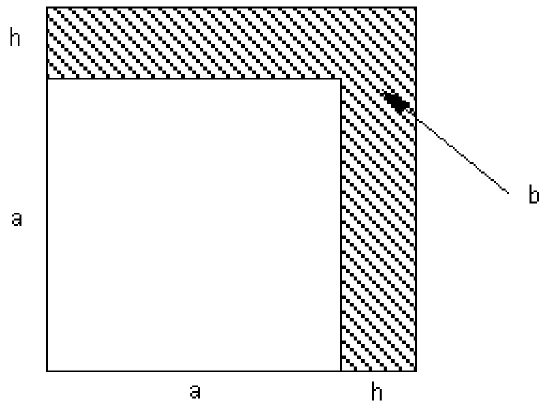
Vervangen we in (1) de term b door b/a dan krijgen we $\quad a < \sqrt{a^2+b} < a+\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots (1a) \quad$.

Wil deze formule nog enigszins klassiek lijken[17] dan moet b nu een oppervlak voorstellen, opdat de formule homogeen blijft.

Een nauwkeuriger benadering krijgen we door een kleiner vierkant als bovenbenadering te nemen en een grotere voor de onderbenadering.
In de figuur hiernaast is het vierkant op a weergegeven. De gearceerde 'winkelhaak', in de klassieke Griekse meetkunde ook wel *gnomon*[18] genoemd, heeft oppervlakte b.
Het is duidelijk dat $h.2a < b$.
We vinden hiermee een vierkant met zijde

$a+\frac{b}{2a}$ als bovenbenadering van het vierkant a^2+b, dus

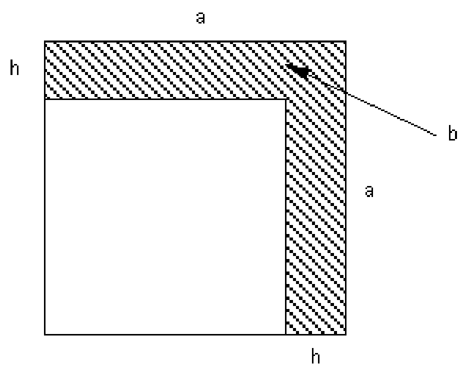
$$\sqrt{a^2+b} < a+\frac{b}{2a} \quad \ldots\ldots (4a)$$



De vorm $a+\frac{b}{2a}$ is het rekenkundig gemiddelde van de onder- en bovengrens van (1a).

Op de zelfde wijze blijkt uit de figuur hiernaast:

$$\sqrt{a^2-b} < a-\frac{b}{2a} \quad \ldots\ldots (4b)$$



[17]In de klassieke Griekse wiskunde is slechts sprake van formules in de vorm van wiskundige zinnen, die uit volledige woorden zijn opgebouwd, de zogenaamde *retorische notatie*. Een uitzondering treffen we aan in de *Artihmetica* van de eerder genoemde Diophantus. In dit werk, dat niet op meetkundige leest geschoeid is, wordt gebruik gemaakt van afkortingen. We spreken hierbij van *gesyncopeerde notatie*. Van de symbolische notatie, zoals wij die tegenwoordig kennen met z'n x-en en y-en, is nog in het geheel geen sprake.

[18]Oorspronkelijke betekenis van het woord *gnomon* is 'zonnewijzer'. Het begrip komt al in de Babylonische wiskunde voor.

Deze benaderingen worden door Heath in verband in verband gebracht met de naam Heroon van Alexandrië (ca. 75 v. Chr.)

The use [...] of this formula by Heron, who made a number of such approximations, is proved by a passage in his Metrica, where a rule equivalent to this is applied to $\sqrt{720}$; ...

Ook bij Kline wordt Heroon in verband hiermee aangehaald:

Heron approximates square roots frequently by means of

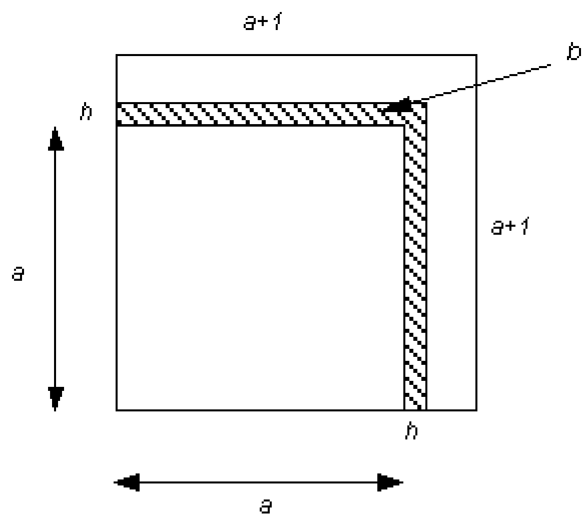
$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

[...] . He gets this approximation by starting with the approximation $\alpha = (c + A/c)/2$ *, where c is any guess as to* $\sqrt{A}$*; if one writes A as* $a^2 + b$ *and chooses c = a, then* $\alpha = a + b/2a$ *.*

Heroon also improves on α by finding $\alpha_1 = (\alpha + A/\alpha)/2$ *. Clearly the closer α is to* $\sqrt{A}$ *, the better approximation* α_1 *will be. Heron's basic expression for α was also used by the Babylonians.*

Een stap verder. De gezochte wortel ligt altijd tussen twee opeenvolgende gehele getallen. We zullen de *eerste* benadering van de wortel beperken tot het afschatten binnen deze dichtsbijzijnde gehelen. Er geldt dan: *a* is geheel en

$$a < \sqrt{a^2+b} < a+1 \qquad \ldots\ldots (5)$$



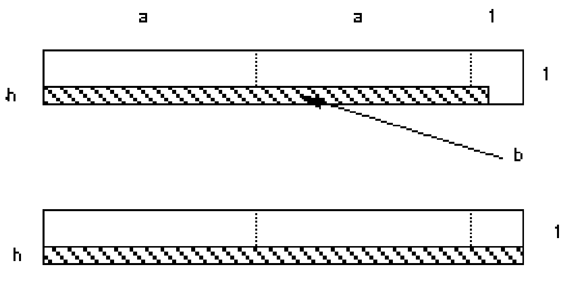
Uit *h<1* volgt

$$h.(2a+1) > h.(2a+h)$$
$$\Rightarrow h.(2a+1) > b$$

Een en ander kan nog wat nader verduidelijkt worden door de gearceerde gnomon *b* te strekken.

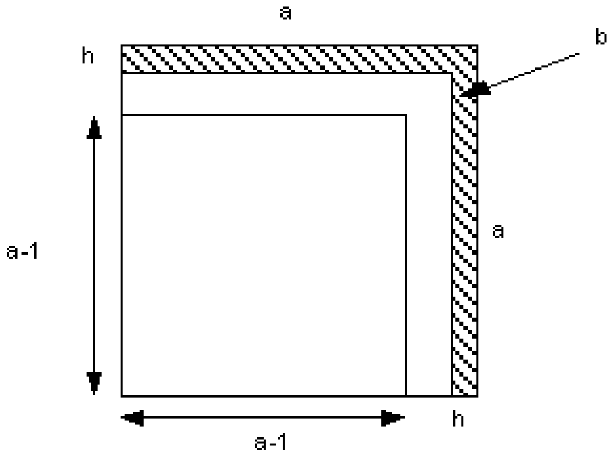
Onder de voorwaarde (5) blijkt nu $a + \dfrac{b}{2a+1}$

een geschikte onderbenadering te zijn voor $\sqrt{a^2+b}$



Er geldt dus:

$$a+\frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} \qquad \ldots\ldots (6a)$$



Gelijksoortige overwegingen in de figuur hiernaast leiden tot

$$a-\frac{b}{2a-1} < \sqrt{a^2-b} \qquad \ldots\ldots (6b)$$

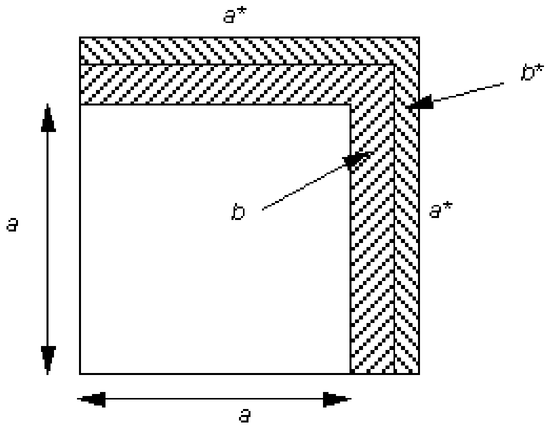
De vormen 6a en 6b zijn gelijkwaardig, elkaars complement. Als √D ingeklemd ligt tussen

$$a^*-a = 1 \quad en \quad b^*+b = (a^*)^2-a^2 = a^*+a$$

de gehelen *a* en a^*, dan is

Met deze relaties blijken de vormen $a+\dfrac{b}{2a+1}$

en $a^*-\dfrac{b^*}{2a^*-1}$ gelijk te zijn.



Heath zegt over de vormen 6a en 6b:

> *... is used by the Arabian Alkharki[19] (eleventh century) who drew from Greek sources and one approximation in Heron may be obtained this way.*

Helaas is het niet duidelijk of Al-Karkhi deze formule ook uit een Griekse bron geput heeft en zo ja, welke.

De formule van Hunrath en Hultsch is hiermee afgeleid. Al met al kan een wortel nu benaderd worden met herhaald toepassen van:

$$a\pm\frac{b}{2a\pm1} < \sqrt{a^2\pm b} < a\pm\frac{b}{2a} \qquad \ldots\ldots (7)$$

[19]Al-Karkhi of Al-Karaji heeft vermoedelijk uit meerdere wiskundige kulturen elementen gehaald. Zo hield hij zich ook bezig met de rekenkunst uit India.
In het werk van Hindoe-wiskundige en astronoom Brahmagupta (6^e eeuw n.Chr.) komt de breuk 22/7 voor als benadering van √10. Deze benadering wijst ook al in de richting van formule (6b). Over Brahmagupta verderop meer.

Te beginnen met a=2 en b=1, levert dit:

$$2-\frac{1}{3} < \sqrt{3} < 2-\frac{1}{4} \qquad \textit{of} \qquad \frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$$

Een mogelijkheid is nu om het gemiddelde van deze twee grenzen als nieuwe inzet te nemen. Dit leidt echter niet tot Archimedes' benadering.
Bij Heath gaat het als volgt verder:

Het linkerlid van de breuk ontdoen geeft $5 < 3\sqrt{3}$

Vervolgens wordt 3√3 ofwel √27 benaderd.

$$5+\frac{2}{11} < \sqrt{27} < 5+\frac{2}{10} \qquad \textit{of} \qquad \frac{19}{11} < \sqrt{3} < \frac{26}{15}$$

Van deze uitdrukking het rechterlid ontbreuken, $15\sqrt{3} < 26$, en dan 26 als benadering van √675 nemen:

$$26-\frac{1}{51} < \sqrt{675} < 26-\frac{1}{52} \qquad \textit{of} \qquad \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Ziedaar Archimedes' benadering.

Dat Archimedes zich bediend heeft van een algoritme op basis van deze formule is onzeker. Klassieke arithmetische algoritmen lijken zoals hier hun oorsprong nogal eens in de meetkunde te vinden. Dit is bekend onder de naam geometrische algebra of, zoals Dijksterhuis het noemt, oppervlakterekening. Het Euclidisch algoritme ter bepaling van de grootste gemeenschappelijke maat is daar een sprekend voorbeeld van.

Het begrip 'geometrische algebra', dat door H.G. Zeuthen is geïntroduceerd, heeft aanleiding gegeven tot verwarring en discussie. Voordat de vraag of Archimedes zich van het beschouwde algoritme bediend heeft, eventueel beantwoord kan worden, is het zinvol om een klein stukje van de discussie in het kort weer te geven. De verwarring richt zich met name op het woord 'algebra'. Het is verleidelijk om te spreken over Griekse algebra in de geest van tegenwoordig. Algebra, als een manier om getallen als maat aan lengten en oppervlakten te verbinden en hier de bekende rekenkundige bewerkingen als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en worteltrekken op los te laten. Dijksterhuis schrijft in *de Elementen* met betrekking tot de geometrische algebra:

> *... dat zij de Grieksche mathematici in staat heeft gesteld, om zonder hulp eener algebra tal van resultaten te bereiken, die voor onzen tijd welhaast onafscheidelijk aan een toepassing van algebraïsche begrippen en methoden op de meetkunde verbonden lijken. De uiteenzetting van deze theorie wordt bemoeilijkt door een gevaar, dat hem die van modern standpunt uit over de Grieksche Wiskunde schrijven wil, steeds, maar hier wel in bijzondere mate bedreigt, het gevaar namelijk, dat men, terwijl men zich bij de uiteenzetting van de klassieke redeneeringen ter verkorting en verduidelijking bedient van moderne begrippen, termen en notaties, aan die redeneeringen onwillekeurig een inhoud gaat toekennen, die ze historisch niet hebben bezeten. [...]*
> *Onze vertrouwdheid met die taal, gepaard aan onze vreemdheid ten opzichte van de zooveel meer omslachtige uitdrukkingswijze der Grieken, verleidt dan al spoedig toe, om met den vorm ook de gedachte te moderniseeren.*

B.L. van der Waerden meent dat er duidelijk sprake is van een Griekse algebra. In *Ontwakende Wetenschap* schrijft hij:

> *De gedachtengang is steeds algebraïsch, de formuleringen meetkundig. [...]*
> *Zoals wij aanstonds nader zullen toelichten, is de meetkundige algebra de voortzetting van de Babylonische algebra. De Babyloniërs noemnden het produkt xy ook al "rechthoek", het quadraat x^2 "vierkant", maar zij gebruikten daarnaast en daardoorheen ook arithmetische uitdrukkingen als vermenigvuldigen, worteltrekken, enz. De Grieken vermijden deze uidrukkingen geheel, behalve bij bewerkingen met gehele getallen en eenvoudige breuken; zij vertalen alles in de meetkundige terminologie. Maar aangezien het hier inderdaad om vertalingen gaat, en de gedachtengang algebraïsch is, kunnen wij de afleidingen gerust weer terugvertalen in de taal der algebra, en onze moderne notatie gebruiken, zonder daardoor de gedachtengang te vervalsen.*

Veel minder overtuigd is I. Mueller in zijn boek *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclids Elements*. Hij zet om te beginnen duidelijke vraagtekens bij het bestaan van Babylonische algebra.

> *... Babylonian mathematics, most of which consists of step by step solutions to particular numerical problems on the basis of a general procedure.*

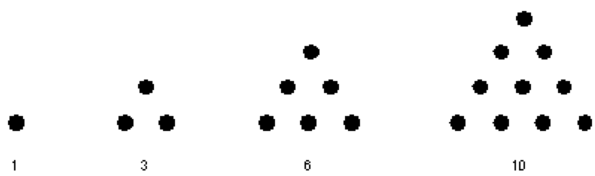
Daarnaast is er volgens Mueller bij de Grieken eerder sprake van een rekenkundige dan een algebraïsche gedachtengang.

> *It seems relatively clear that geometric ideas played a substantial role in early Greek arithmetic thinking which may well have been based entirely on the representation of numbers as plane arrays of units. The way of dealing with numbers would obviously facilitate the recognition of analogies between geometric results and arithmetic ones and would also suggest the possibility of exploiting geometric procedures in arithmetic. Such analogal thinking is to be distinguised from the algebraic approach of combining the treatment of distinct disciplines by abstracting the common features of the object they deal with.*

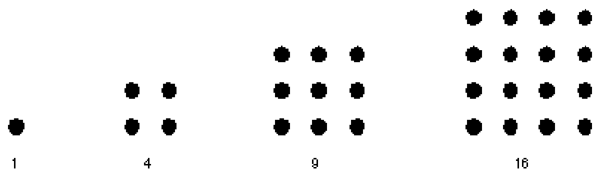
Een voorbeeld. In de Griekse Oudheid stond het onderzoek naar het getal op zich sterk in de belangstelling. Een aantal overgeleverde tekstgedeelten doen vermoeden dat hierbij ook gebruik is gemaakt van het zogenaamde 'steentjes leggen'. Aristoteles schrijft in zijn *Metaphysica* met betrekking over dit onderzoek naar getallen:

> *... daarbij gebruik makend van steentjes, zoals diegenen die getallen gestalte geven in de vorm van de driehoek en het vierkant.*

Vermoedelijk is dit in de school van Pythagoras een belangrijke manier geweest om getallen voor te stellen.
Bij hen er bijvoorbeeld sprake van de driehoeksgetallen 1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., waarvan het patroon in een oogopslag duidelijk wordt in de afbeelding hiernaast.



Zo danken ook de vierkante getallen 1, 4, 9, 16, 25, ..., de kwadraten, hun naam aan de vorm van de groep steentjes.
In de vierkante vorm treffen we bijvoorbeeld ook het *gnomon* aan, dat we reeds zijn tegengekomen in de Griekse oppervlakterekening. Het getal 9 kun je aanvullen tot 16 door er een 'winkelhaakje' van 7 steentjes aan toe te voegen (zie ook pag. 32).



Vermoedelijk is het deze vorm van de getallen, die van oorsprong als arithmetische tegenhanger van de meetkunde diende. Arithmetische algoritmen en meetkundige algoritmen zijn in dat geval meer op te vatten als analogieën in vorm, dan dat de ene de kwantitatieve afleiding van de ander is. De zijde- en diagonaalgetallen, die we verderop zullen bespreken, zijn naar mijn idee hier een mooi voorbeeld van.
Voor ons post-Cartesianen is de formule (7) duidelijk meetkundig af te leiden, omdat wij in staat zijn letters aan lengten en oppervlakten te verbinden en hiermee te rekenen. Maar in het licht van het voorgaande is het niet zo eenvoudig in te zien hoe de klassieken een algoritme op basis van deze formule 'meetkundig afgeleid' kunnen hebben.

De aanwezigheid van het getal 1 in formule (7) maakt het zeer onwaarschijnlijk dat deze formule een produkt is van een mogelijke geometrische algebra. De eenheid komt in *de Elementen* van Euclides pas aan bod in boek VII, het eerste van de drie arithmetische boeken:

> *Eenheid is datgene op grond waarvan elk bestaand ding een genoemd wordt.*

Boek II van *de Elementen*, waarin de oppervlakterekening zo nadrukkelijk voorkomt, is te kwalificeren als zuiver kwalitatief, terwijl de in de arithmetische boeken ook kwantiteit een rol gaat spelen. En juist deze scheiding, voortgekomen uit de crisis die de Pythagorese wereld trof bij de ontdekking van de irrationaliteiten, is zo kenmerkend voor de Griekse wiskunde.
Dijksterhuis spreekt in *de Elementen van Euclides* over

> *... het principiële verschil tusschen de Grieksche en de moderne opvattingen van het verschijnsel der irrationaliteit, een verschil, dat kort als volgt is te omschrijven, dat de Grieken hunne irrationaliteiten bestudeeren vanuit het gezichtspunt der qualiteit en ze dus ook classificeeren naar qualitatieve beginselen, terwijl wij, als gevolg van de uitbreiding van het getalbegrip op irrationale grootheden, gewend zijn aan een overheerschend quantitatieve opvatting.*

De vraag of de vorm (7) al dan niet meethundig afgeleid is, is voor Dijksterhuis in *Archimedes* niet zo relevant. Hij durft hem gerust als variant van de Babylonische 'formule' te beschouwen.

> *Another possibility is that we have to do here with the application of a subsidiary form of the Babylonian rule, in which for* $\sqrt{p^2-r}$ *we do not write the too high value* $p-\frac{r}{2p}$ *, but the too low value* $p-\frac{r}{2p-1}$ *. [...]*
>
> *One may observe that such a procedure after all has no demonstrative force; from a historical point of view this can hardly be called an objection: it is precisely in the field of arithmetic that people were long content (certainly up to the 17th century) to suggest rules and state that they give good results.[...]*

Er is tenslotte nog een esthetisch bezwaar tegen de beschouwde formule. Dijksterhuis in zijn boek *Archimedes:*

> *Another objection that might be raised to the above reconstructions is that they do not use the same system at the lower and the upper limit; this again is no conclusive historical argument, since it is not known for certain whether the Greek logisticians actually possessed a fixed system for approximations to square roots. Mathematically, however, it may be felt as an aesthetic objection; [...].*

Al met al lijkt het mij het meest zinvol om in het vervolg de door Hunrath en Hultsch geopperde formule als een arithmetisch algoritme op te vatten, en wel een variant op het Babylonische benaderen van wortels.

De kettingbreuk als benadering van een wortel

Gegeven is de kettingbreuk
$$k_\infty = \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{\cdots}}}} = \frac{b|}{|2a} + \frac{b|}{|2a} + \frac{b|}{|2a} + \ldots..$$

met $a \in N^+$, $b \in Q$.

Noem $k_0 = \dfrac{b}{2a}$, $k_1 = \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a}}$, $k_2 = \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a}}}$,

dan geldt de recurrente betrekking $$k_{n+1} = \frac{b}{2a+k_n} \qquad \ldots..(8)$$

$$k_\infty = \lim_{n\to\infty} k_n = \frac{b}{2a+k_\infty} \quad\Rightarrow\quad k_\infty(2a+k_\infty) = b \quad\Rightarrow\quad a^2 + k_\infty(2a+k_\infty) = a^2+b$$
$$\Rightarrow\quad k_\infty = \sqrt{a^2+b} - a$$

Een en ander levert voor de benadering van wortels de volgende formule
$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b|}{|2a} + \frac{b|}{|2a} + \frac{b|}{|2a} + \ldots \qquad \ldots..(9)$$

Voor de benadering van √3, met a=1 en b=2, krijgen we
$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \ldots \qquad = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \ldots$$

hetgeen achtereenvolgens de volgende breuken levert:
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780} \ldots\ldots \qquad \ldots..\ (10)$$

Er zit een regelmaat in de afzonderlijke tellers en noemers van deze breuken, als we even niet op het vereenvoudigen van de breuken letten. Van iedere breuk is de noemer gelijk aan de som van teller en noemer van de vorige breuk. En de teller is de som van teller en het drievoud van de noemer van de vorige. Ofwel de lineaire transformatie
$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ n_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t_n \\ n_n \end{pmatrix} \qquad \ldots..\ (11)$$

De benaderingen van √3 door Archimedes zitten er bij, maar het lijdt geen twijfel dat hij niet zonder meer van het hier beschreven kettingbreukalgoritme gebruik gemaakt kan hebben.

In Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* (dl VI, 1924) lezen we:

> *Ebenso wie kein Zweifel sein kan, daß dies Verfahren trotz der geometrischen Aufmachung auch rein rechnerisch ausgeübt wurde - literarische Nachweise hierfür haben wir allerdings erst in der späteren indischen mathematik (Bhaskara[20]) -, so steht auch fest, daß ein Kettenbruchalgorithmus damit nicht verbunden war; das verbot schon die ungefüge Bruchschreibart der Griechen. Unbekannt sind ihnen auch allgemeine Sätze über die beim Rechnen auftretenden Zahlen, wie wir sie bei aufstellung der Näherungsbrüche benutzen. Allerdings klingen einzelne ihrer Untersuchungen an Kettenbruchrechnung an, so das Auswerten von Quadratwurzeln. Uns ist die Entwicklung geläufig:*
>
> $$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\dots}}}$$
>
> *die z. B. bei $\sqrt{2}$ die Näherungswerte* $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$ *[...] liefert.*

Zoals reeds eerder is opgemerkt: alleen al de schrijfwijze van breuken bij de oude Grieken maakt het onmogelijk om het verschijnsel kettingbreuk een plaats te geven in hun tijd.

Een andere moeilijkheid schuilt in het alternerende karakter van de opeenvolgende benaderingen. Hoe zou Archimedes hebben kunnen weten dat uit de rij (10) van twee opeenvolgende breuken er telkens één een onderbenadering is en de ander een bovenbenadering? Het is uit te sluiten dat hij dat heeft kunnen inzien alleen op grond van een formeel algoritme als de kettingbreukontwikkeling[21]. Bovendien zouden bij een eventueel inzicht in het alternerende karakter van de rij bijvoorbeeld de waarden $\frac{265}{153}$ *en* $\frac{362}{209}$ meer voor de hand liggen.

Vanaf de zeventiende eeuw werd de kettingbreuk als zelfstandig wiskundig fenomeen ter hand genomen door mensen als Huygens, Euler, Lambert en Lagrange.
Johannes Tropfke:

> *Ein großen Schritt vorwärts tat Huygens (1629-1695, Haag). Er hatte sich den Bau eines Planetariums vorgenommen; um die Zahnräder des Getriebes herzustellen, mußte er die Verhältnisse der Umlaufszeiten der einzelnen Weltkörper durch möglichst kleine Zahlen, aber auch möglichst genau ausdrücken. Hier zog er die Kettenbruchentwicklung heran und bewies an den vorliegenden Beispielen, also nicht allgemein, eine Reihe sehr wichtiger Sätze [...]*
> *...; drittens, daß die nacheinander zu berechnenden Näherungsbrüche abwechselnd größer und kleiner sind.*
> *Euler (1707-1783), dem die Lehre von den Kettenbrüchen am meisten verdankt, scheint Huygens' Untersuchungen nicht gekannt zu haben; [...]. Bereits in seiner ersten Schrift 'De fractionibus continuis' vom Jahre 1737 begründete er eine eigene Theorie der Kettenbrüche und entwickelte Sätze. die schon beträchtlich über das hinausgehen, was in den heutigen*

[20]Bhaskara II (1114 - ca. 1185), de laatste grote Hindoe-wiskundige.

[21]Het alternerende karakter is modern te verklaren, bijvoorbeeld vanwege het feit dat de transformatiematrix van (11) een positieve dominante eigenwaarde (1+√3) heeft en een negatieve ondergeschikte eigenwaarde (1-√3).

Schulen gelehrt wird. Sämtliche Sätze, die wir bei Huygens kennen lernten wurden von Euler ganz allgemein abgeleitet. [...]. Neu ist die allgemeine Aufstellung der Grundgleichung:

$$\frac{z_k}{n_k} - \frac{z_{k-1}}{n_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{n_k\, n_{k-1}}$$

De kettingbreuk heeft uiteindelijk ook een belangrijke rol gespeeld in het bewijs dat π een transcendent getal is, waarmee de cirkel weer rond is.

In formele zin werd er in de Oudheid dus nog geen gebruik gemaakt van kettingbreuken. Dat neemt niet weg dat er al een aantal algoritmen zijn die heel goed met kettingbreuken te beschrijven zijn.
In het voorwoord van zijn *History of Continued Fractions and Padé Approximations* schrijft Claude Brezinski:

> *As it is often the case and like Monsieur Jourdain in Molière's "le bourgeois gentilhomme" (who was speaking in prose though he did not know he was doing so), continued fractions were used for many centuries before their real discovery.*

Als prominent voorbeeld noemt hij het Euclidisch algoritme voor de bepaling van de gemeenschappelijke maat van twee grootheden, of modern, voor de bepaling van de grootste gemene deler van twee gehele getallen. Wanneer de grootheid g_1 afgemeten kan worden op g_0 ($g_0 > g_1$), en wel d_0 keer, blijft er in de regel een rest over. Noem deze rest g_2: $g_0 = d_0 . g_1 + g_2$.

Vervolgens wordt de rest g_2 afgemeten op de vorige maat g_1:
$g_1 = d_1 . g_2 + g_3$. Nu ontstaat er een reeks delingen

$$g_n = d_n . g_{n+1} + g_{n+2} \qquad of \qquad \frac{g_n}{g_{n+1}} = d_n + \cfrac{1}{\cfrac{g_{n+1}}{g_{n+2}}}$$

tot het moment dat er voor een zekere waarde van n+1 er geen rest overblijft. De gemeenschappelijke maat van g_0 en g_1 is dan g_n. De verhouding van g_0 en g_1 is als kettingbreuk te schrijven:

$$\frac{g_0}{g_1} = d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \ldots + \frac{1|}{|d_{n-1}} \qquad \ldots\ldots (12)$$

Zo is

$$\frac{265}{153} = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} = \frac{1}{3}(5 + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|10})$$

Vergelijking met (10) toont de nauwkeurige benadering van √3. Het is Euler die formeel bewijst dat een eindige kettingbreuk overeenkomt met een rationaal getal en een oneindige kettingbreuk met een irrationaal getal.

De Pell-vergelijking

Bij een rationale benadering van √3 zoeken we twee natuurlijke getallen x en y zodat

$$3 \approx (\frac{x}{y})^2 \qquad ofwel \qquad x^2 - 3y^2 = d \qquad \ldots\ldots (13)$$

waarbij d een zo klein mogelijk geheel getal is. Bij positieve d is x/y een bovenbenadering van √3 en bij negatieve d is het een onderbenadering. Lang niet alle waarden van d leveren paren x en y op. Het is duidelijk dat dit bijvoorbeeld voor d=0 het geval is. Ook d=-1 is ongeschikt, aangezien een kwadraat nooit een drievoud minus 1 is (d=2 voldoet dus ook niet)[22].

In de speurtocht naar de banadering van √3 zijn de waarden d=1 en d=-2 voor de hand liggend. Ten eerste omdat ze op de hiervoor genoemde waarden na absoluut gezien de kleinste waarden van d zijn. En ten tweede omdat ze het resultaat zijn van de kleinste paren (x,y), respectievelijk (2,1) en (1,1). De getallenparen (0,0) en (1,0) voldoen niet als breuk. Zodoende krijgen we de door Tannery en Zeuthen beschouwde vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1 \\ x^2 - 3y^2 = -2 \end{cases} \qquad \ldots\ldots (14)$$

waarvan de eerste ook wel een Pell-vergelijking[23] wordt genoemd.

Al bij Archimedes komt een dergelijke vergelijking voor, verscholen in het eerder genoemde beroemde probleem over de grazende koeien. Nog explicieter komen we hem tegen bij Diophantos (ca. 250 n.Chr.). Er is echter nog geen spoor te vinden van een systematische oplossing. Dit is waarschijnlijk voor het eerst pas het geval bij de Indische wiskundige en astronoom Brahmagupta (7e eeuw n.Chr.). In zijn *Brahma-sphuta-siddhanta*, een sterrenkundig werk, treffen we de Pell-vergelijking aan.

George Joseph, in *The Crest of the Peacock*:

> *... we concentrate here on the climax of Indian work in this area - the solution of indeterminate equations of the second degree. Brahmagupta considered the following two equations, the second of which is a special case of the first:*
>
> $$ax^2 \pm c = y^2$$
> $$ax^2 + 1 = y^2$$
>
> *where a and c are known as the multiplier and augment, and x and y as the smaller and larger roots. [...]*
> *Brahmagupta was probably the first mathamatician to give solutions to both equations [...] in rational integers. His approach is ingenious and general.*

De latere Indische wiskundige Bhaskara heeft in een werk uit 1150, genaamd *Siddhantasiromani*, Brahmagupta's werk verduidelijkt en uitgewerkt.

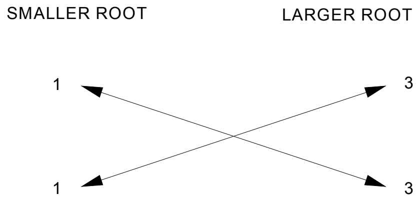
---

[22]Ieder geheel getal is een drievoud -1, een drievoud of een drievoud +1. Ieder kwadraat is dus te schrijven als 0 of 1 [mod 3].

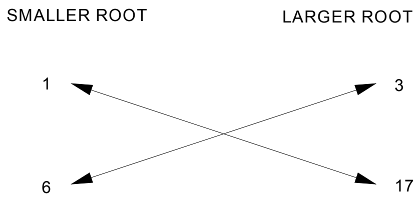
[23]Abusievelijk door Euler vernoemd naar de Engelsman John Pell (1610-1685).

Als voorbeeld bekijkt Bhaskara de vergelijking

$$8x^2 + 1 = y^2 \quad .$$



Het kleinste getallenpaar, dat voldoet, is (1,3). Hierbij wordt 1 de kleinste oplossing genoemd en 3 de grootste. Door deze oplossingen kruislings te vermenigvuldigen en op te tellen, wordt de volgende kleinste oplossing verkregen (zie figuur hiernaast). De bijbehorende y-waarde krijg je met behulp van het volgende recept: neem het product van de kleinste oplossingen, vermenigvuldig dit met 8, en tel er het product van de grootste oplossingen er bij op. Dus: *x = 1.3 + 1.3 = 6   en   y = 1.1.8 + 3.3 = 17 .*



Vervolgens wordt het nieuwe getallenpaar tegenover het oude gesteld en wordt de procedure herhaald (zie figuur). Dit levert dan (35,99). En zo voorts, waarbij (1,3) altijd als eerste oplossingspaar in het schema gehandhaafd blijft.

Voor een algemene vergelijking

$$x^2 - py^2 = 1 \quad of \quad \begin{vmatrix} x & py \\ y & x \end{vmatrix} = 1$$

is deze procedure ook wel als een lineaire transformatie van een toevallig gevonden oplossing (a,b) te schrijven, met transformatiematrix M_1 [24]:

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & pb \\ b & a \end{pmatrix}$$

Oplossingen zijn nu ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_1 . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad en \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_1{}^k . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , k \in \mathbb{N}$.

Als (a,b) de oplossing is die het 'dichtst' bij de triviale oplossing (1,0) ligt, dan zijn met deze transformatie alle oplossingen te vinden. Het bewijs hiervan - uit het ongerijmde - laat ik achterwege.

Het kleinste niet-triviale getallenpaar dat aan de bovenste vergelijking van (14) voldoet is (2,1). We krijgen nu alle oplossingen met de transformatiematrix $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Voor de bovenbenadering van √3 levert dit achtereenvolgens de breuken $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \quad enz$, waarden die we ook al in (10) tegenkwamen.

[24]De index 1 bij M_1 duidt op het feit dat het augment van de vergelijking 1 is.

Algemeen geldt, indien $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een oplossing is van de vergelijking $\begin{vmatrix} x & py \\ y & x \end{vmatrix} = d$ met bijbehorende transformatiematrix M_d:

a) $M_1{}^k . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een oplossing van $\begin{vmatrix} x & py \\ y & x \end{vmatrix} = d$ en

b) $M_d{}^k . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een oplossing van $\begin{vmatrix} x & py \\ y & x \end{vmatrix} = d^{k+1}$, $i,k \in \mathbb{N}$.

Een en ander is van toepassing op de onderste vergelijking van (14). De kleinste oplossing is (1,1). Alle oplossingen zijn nu te vinden met behulp van a) $M_1^k . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$. Voor de onderbenadering van √3 levert dit de breuken $\frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{19}{11}, enz$, zie ook (10).

Toepassing van b) levert echter meteen zowel onder- als bovenbenadering van √3, immers als $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ de oplossing is van $\begin{vmatrix} x & 3y \\ y & x \end{vmatrix} = (-2)^{k+1}$ dan geldt:

- voor k is even, is $\begin{pmatrix} p \,.\, 2^{\frac{2}{k}} \\ q \,.\, 2^{\frac{2}{k}} \end{pmatrix}$ een oplossing van $\begin{vmatrix} x & 3y \\ y & x \end{vmatrix} = -2$

- voor k is oneven, is $\begin{pmatrix} p \,.\, 2^{\frac{2}{k+1}} \\ q \,.\, 2^{\frac{2}{k+1}} \end{pmatrix}$ een oplossing van $\begin{vmatrix} x & 3y \\ y & x \end{vmatrix} = 1$

Ook hier blijkt dus de lineaire transformatie $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de basis te zijn voor het vinden van de correcte benaderingen. Brahmagupta was het er evenwel om te doen om de Pell-vergelijkingen op te lossen.

George Joseph:

> *It is worth noting that this method was first used by Brahmagupta as early as AD 600, though it is usually attributed to Euler, who named it theorem elegantissimum. The sheer ingenuity and versatility of the approach is also highlighted by the fact that it was not until 1767 that Lagrange gave a complete solution to Pell's equation, using continued fractions.*[25]

---

[25] De methode van Lagrange, gepubliceerd bij de Turijnse Academie van Wetenschappen, werkt zonder dat je van te voren de kleinste niet-triviale oplossing dient te kennen.

Dat de zojuist bekeken methode inderdaad een benadering van √3 oplevert blijkt overigens ook uit

het feit dat de dominante eigenvector van zowel M_1 als M_{-2} gelijk is aan $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Herhaalde translatie met M_1 levert òf alleen bovenbenaderingen òf alleen onderbenaderingen van √3, afkankelijk van de startwaarde. Het blijkt dat de niet-dominante eigenwaarde positief is: 2-√3. In tegenstelling tot de niet-dominante eigenwaarde van M_{-2} die, zoals we eerder gezien hebben, negatief is
(1-√3), hetgeen het alterneren van de oplossingen bij herhaald transleren verklaart.

De meeste historici zijn het erover eens dat de Griekse wiskundigen ten tijde van Archimedes al op de hoogte waren van Brahmagupta's methode om de Pell-vergelijking op te lossen, zij het dan dat de vergelijking minder expliciet werd beschouwd en dat de methode meer op meetkundige leest geschoeid is en in feite de inverse van het Euclidisch algoritme is. In de volgende paragraaf, over de zijde- en diagonaalgetallen, zal dit verduidelijkt worden.

Tot slot is er nog de formule die C. Müller gesuggereerd heeft: $c = \frac{ab+D}{a+b}$ ..... (15)

waarbij c een bovenbenadering van √D is als a en b zelf beide een onder- of bovenbenadering zijn en waarbij c een onderbenadering is als een van beide, a of b, een bovenbenadering is en de ander een onderbenadering.
De nieuwe benadering c is het rekenkundig gemiddelde van het harmonisch gemiddelde van twee

voorgaande benaderingen, $\frac{2ab}{a+b}$, en de uitdrukking $\frac{2D}{a+b}$.

O. Toeplitz heeft aangetoond dat de formule in feite neerkomt op Brahmagupta's methode. Dit is voor D=3 eenvoudig in te zien door voor a konsekwent de onderbenadering 1 te nemen.

Met $b = \frac{t_n}{n_n}$ en $c = \frac{t_{n+1}}{n_{n+1}}$ levert dit $\frac{t_{n+1}}{n_{n+1}} = \frac{t_n+3n_n}{t_n+n_n}$, hetgeen overeenkomt met de lineaire

transformatie M_{-2}. Met de bovenbenadering a=2 komt uitdrukking (15) overeen met M_1.

Zijde- en diagonaalgetallen

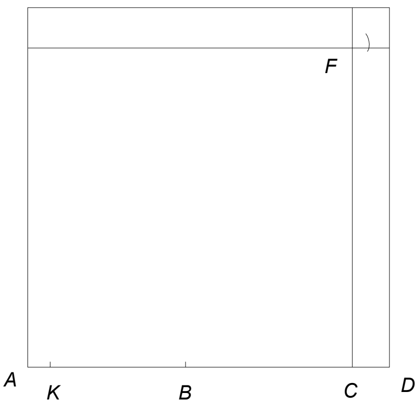
In Plato's *Politeia* (VIII, 546 v Chr) is sprake van het zogenaamde geometrische getal 4800,

> *honderd maal een getal, dat één minder is dan het kwadraat van de rationale diameter* [diagonaal] *van vijf of twee minder dan dat van de irrationale diameter.*

Het getal in deze passage is 48, 1 minder dan het kwadraat van 7 en twee minder dan het kwadraat van √50.
Opvallend is dat 7 de rationale diagonaal van 5 wordt genoemd. Met andere woorden, een vierkant met zijde van vijf lengte-eenheden heeft bij benadering een diagonaal ter lengte van het rationale getal 7. Inderdaad is 7/5 een aardige benadering van √2.

E.J. Dijksterhuis spreekt in zijn *Elementen van Euclides* over de oppervlakterekening, die in de pré-Euclidische wiskunde een rol kan hebben gespeeld bij het ontdekken en bepalen van irrationaliteiten.
Twee fragmenten hieruit, die ook een licht kunnen werpen op de benadering van wortels. Ten eerste over een hypothese van H.G. Zeuthen dat Theodorus van Cyrene (ca. 400 v. Chr.) de oppervlakterekening toegepast zou hebben om het bestaan van irrationaliteiten te bewijzen. Deze hypothese heeft betrekking op een fragment in Plato's dialoog *Theaitetos*, waarin een uiteenzetting van Theodorus is gegeven over de onderlinge onmeetbaarheid van de eenheid van lengte met de zijde van een aantal vierkanten.

> *Het doel van dit bewijs moet zijn geweest, aan te toonen, dat de zijde van een vierkant met vijf eenheden van oppervlak onderling onmeetbaar is met de zijde van het eenheidsvierkant, door te laten zien dat de antanairesis*[26]*, d.w.z. de Euclidische algorithmus ter bepaling van de grootste gemeene maat van twee lijnstukken, hier periodiciteit vertoont.*
> *Zij AB de zijde van het eenheidsvierkant en laat met behulp van de stelling van Pythagoras AD zoo geconstrueerd zijn dat*
>
> $$T(AD) = 5T(AB)$$ [27]
>
> *Maak verder AC=2AB, en beschrijf vierkanten op AC en op AD. Nu is*
>
> $$\Gamma(F) = T(AD) - T(AC) = T(AB)$$
>
> *en tevens*
>
> $$\Gamma(F) = 2O(AC,CD) + T(CD) \quad ,$$
>
> *dus*
>
> $$T(AB) = 4O(AB,CD) + T(CD) \quad .$$



[26]Letterlijke betekenis is 'het beurtelings wegnemen'.

[27]Betekenis van de afkortingen:

O(AC,CD):	Rechthoek met zijden AC en CD	(O van *Orthogonion*)
T(AD):	Vierkant met zijde AD	(T van *Tetragonon*)
Γ(F):	Het *gnomon* op punt F.	Het gaat hierbij om het figuur dat het verschil is van de vierkanten op AD en AC.

Denken we ons nu T(CD) aangepast aan AB, zoodat T(CD) = O(AB,AK) , dan wordt T(AB) = O(AB,4CD+AK) , dus AB = 4CD + AK (AK<CD) , terwijl

$$AB : CD = CD : AK \qquad ..... (16) \quad .$$

Hieruit volgt, dat ook $CD = 4AK + AK' \; (AK' < AK) \qquad ..... (17)$ *enz. ad infin.*

Het is duidelijk dat het algoritme in dit geval eindeloos voortgezet kan worden, hetgeen betekent dat AD en AB onderling onmeetbaar zijn.
Verhouding (16) kan ook verder ontwikkeld worden:
AB:CD = CD:AK = AK:AK' enz. In getallen uitgedrukt levert dit algoritme het volgende op voor de benadering van √5:

$$\begin{array}{lll} AD = 2AB + CD & \rightarrow & \sqrt{5} = 2.1 + (\sqrt{5}-2) \\ AB = 4CD + AK & \rightarrow & 1 = 4(\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}-2)^2 \\ CD = 4AK + AK' & \rightarrow & (\sqrt{5}-2) = 4(\sqrt{5}-2)^2 + (\sqrt{5}-2)^3 \end{array} \qquad ..... (18)$$

Uitdrukking (18) kan nu eenvoudig in een moderne kettingbreukvorm omgezet worden:

$$1 = 4(\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}-2)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{5}-2} = 4 + (\sqrt{5}-2) \quad \rightarrow \quad \sqrt{5} = 2 + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|4} + \ldots$$

Het volgende fragment uit het werk van Dijksterhuis gaat over de zogenaamde zijde- en diagonaalgetallen:

Onder zijde- en diagonaalgetallen verstaat men de getallen uit de volgende rijen:

zijdegetallen	a_i	*1*	*2*	*5*	*12*	*29*	*.....*
diagonaalgetallen	d_i	*1*	*3*	*7*	*17*	*41*	*.....*

welke gevormd zijn volgens de formules

$a_1=1$, $d_1=1$
$a_n=a_{n-1}+d_{n-1}$, $d_n=2a_{n-1}+d_{n-1}$ $(n>1)$ ..... (19)

en die de eigenschap hebben

$d_n^2=2a_n^2+(-1)^n$ ..... (20)

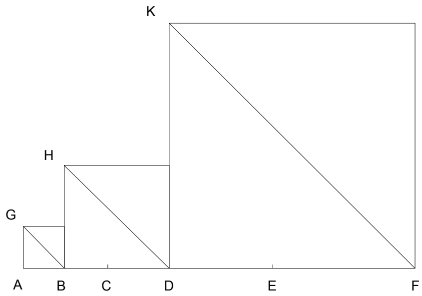
*Men kan de vorming van beide rijen en hun eigenschap uiteengezet vinden in een werkje van Theoon van Smyrna, waarin hij een aantal wiskundige onderwerpen behandelt, waarvan de kennis nuttig is voor de studie van de werken van Plato, daarnaast in vrijwel overeenkomstige bewoordingen in den commentaar van Iamblichos (*gestorven ca. 330 na Chr.*) op de Arihmetica Introductio van Nikomachus van Gerasa (*tussen 50 en 150 na Chr.*) en bovendien nog in dien van Proklos*[28] *op de Politeia van Plato. [...]*

[28]Proklos of Proclus (410-485), wiskundige en filosoof aan de Neo-Platonische school in Athene, wiens beroemde commentaar op het eerste boek van Euclides' *Elementen* een belangrijke bron is voor de geschiedenis van de Griekse wiskunde.

Het is nu de vraag, wat de namen zijde- en diagonaalgetallen te beduiden hebben en hoe men de eigenschap ($d_n^2=2a_n^2+(-1)^n$) algemeen heeft kunnen inzien.
*Op het eerste probleem wordt licht geworpen door een latere passage uit den geciteerde commentaar van Proklos, waarin hij zegt, dat de vorming van zijde- en diagonaalgetallen door "hem" (*Euclides*) in het tweede der Stoicheia (*Elementen*) graphisch is aangetoond daarna citeert hij de te gebruiken stelling, die inderdaad Euclides II.10*[29] *blijkt te zijn.*

Dijksterhuis verduidelijkt een en ander met een figuur zoals hiernaast. Beschouw een vierkant met zijde AB, AB=BC en CD=BG. Tevens een vierkant met zijde BD. Volgens genoemde II.10 geldt nu:

$$T(AD)+T(CD) \;=\; 2T(AB)+2T(BD) \qquad \ldots\ldots\ (21)$$



Volgens de stelling van Pythagoras (I.47) geldt:

$$T(CD) \;=\; T(BG) \;=\; 2T(AB)$$

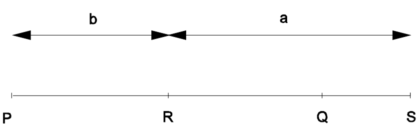
Samen met (21) levert dit T(AD) = 2T(BD) , ofwel AD is gelijk aan de diagonaal van het vierkant op BD. Op deze wijze kunnen er voortdurend nieuwe vierkanten gevormd worden, waarvan de diagonaal gelijk is aan twee maal de zijde plus een maal de diagonaal van de linker buurman, bijvoorbeeld FK = 2BD + DH = BF.
Noemen we de lengte van de zijde van het n^e vierkant a_n en die van de bijbehorende diagonaal d_n, dan voldoen deze aan uitdrukking (19). Aangezien a_n en d_n onderling onmeetbaar zijn, is de opeenvolging van zijden en diagonalen niet zo maar in twee reeksen getallen om te zetten, uitgaande van dezelfde eenheid. Belangrijk is het echter in te zien dat de meetkundige identiteit (21) geldig is, ongeacht het feit of er geldt:
T(BG) = 2T(AB). Met andere woorden, al zou vierhoek GB geen vierkant zijn met zijde 1, maar een ruit (bijvoorbeeld met diagonaal BG=1), dan nog is een reeks van vierhoeken - in dit geval ruiten - te vormen, met behulp van dezelfde procedure. Het blijkt dan dat de ruiten steeds meer op vierkanten gaan lijken. We kunnen dus een reeks zijden en diagonalen ontwikkelen, te beginnen met a_1=1 en d_1=1.

De waarde d_1=1 is de nauwkeurigste gehele benadering van de irrationale diagonaal behorende bij een zijde met de eenheid als lengte. De hieropvolgende reeks diagonaalgetallen zullen eveneens steeds de nauwkeurigste gehele benadering zijn. De onderlinge verhouding van de paren diagonaal- en zijdegetallen zal steeds meer naar de irrationaliteit √2 naderen. Hiermee is de naam zijde- en diagonaalgetallen verklaard.

Proklos omschrijft een en ander als volgt in zijn commentaar op Plato's Politeia:
Als de oorsprong van alle getallen kan de eenheid zowel een lengte als een diagonaal zijn. Laat er twee eenheden genomen worden: een zijde-eenheid en een diagonaal-eenheid. Dan wordt een nieuwe zijde gevormd door de de diagonaal-eenheid bij de zijde-eenheid op te

---

[29]De Elementen, boek II, propositie 10:



PQ is een gegeven lijnstuk, waarvan R het midden is. S ligt op het verlengde van PQ.
Er geldt nu: T(PS) + T(QS) = 2T(RS) + 2T(PR)
Modern, als RS=*a* en PR=*b*, dan: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$

tellen, en een nieuwe diagonaal door twee keer de zijde-eenheid bij de diagonaal-eenheid op te tellen.

Eigenschap (20) is eenvoudig in te zien als we uitdrukking (21) herschrijven.

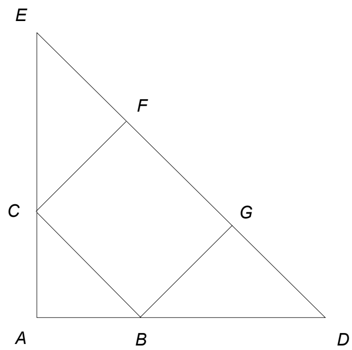
$$T(AD) - 2T(BD) = 2T(AB) - T(CD) \quad \rightarrow \quad d_2^2 - 2a_2^2 = 2a_1^2 - d_1^2 \quad \textit{ofwel}$$
$$\rightarrow \quad d_n^2 - 2a_n^2 = 2a_{n-1}^2 - d_{n-1}^2$$

Met a_1=1 en d_1=1 krijgen we

$$2a_1^2 - d_1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 2a_2^2 - d_2^2 = -1 \quad \textit{enz.} \quad \rightarrow \quad d_n^2 = 2a_n^2 + (-1)^n$$

B.L. van der Waerden schrijft in zijn *Geometry and Algebra in Ancient Civilizatios*:

> *This proof, which can easily be reconstructed from the text of Proklos is the earliest known example of a proof by "complete induction" or "passage from n to n+1". The Pythagorean who found the recursion rule (19) and proved (20) must have been an excellent mathematician!*



Met betrekking tot de meetkundige gedachtengang achter genoemde getallenrijen staat in Cantors *Vorlesungen* nog een suggestie vermeld, afkomstig van P. Bergh (1886).
Van een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC worden de rechthoekszijden verlengd, zodat BD = CE = BC. Bij de nu ontstane gelijkvormige driehoek ADE kan dit proces herhaald worden. Noem de rechthoekszijde van de oorspronkelijke driehoek a_n en de schuine zijde d_n. Dan is eenvoudig in te zien dat voor a_{n+1} en d_{n+1}, respectievelijk de rechthoekszijde en de schuine zijde van nieuw gevormde driehoek, geldt:

$$a_{n+1} = a_n + d_n \qquad en \qquad d_{n+1} = 2a_n + d_n \qquad \ldots\ldots (22)$$

De vorming van zijde- en diagonaalgetallen, zoals tot nu toe bekeken is in feite de inverse van het Euclidisch algoritme. B.L. van der Waerden:

> *The linear transformation (19) is closely connected with the Euclidean algorithm. In fact, if we solve (19) for a_n and d_n we obtain*

$$a_n = d_{n+1} - a_{n+1}$$
$$d_n = a_{n+1} - a_n$$

> *Hence, if d_{n+1} and a_{n+1} are diagonal and side of a square and if we apply the Euclidean method for alternate subtraction, we obtain in two steps*

$$(d_{n+1}\ ,\ a_{n+1}) \rightarrow (a_{n+1}\ ,\ d_n) \rightarrow (d_n\ ,\ a_n)$$

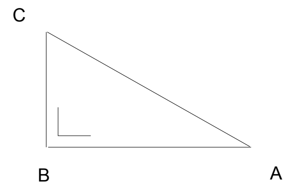
> *This means: the transformation (22), applied to side and diagonal of a square, is just the inverse of the Euclidean algorithm, applied to the diagonal d_{n+1} and side a_{n+1} of a larger square.*

Dijksterhuis in *de Elementen*:

> *De theorie van de zijde- en diagonaalgetallen is zeker reeds lang voor Euclides bekend geweest, al zal zij aanvankelijk wel op andere wijze behandeld zijn, dan na de ontdekking der oppervlakterekening mogelijk was. Proklos kent haar aan de Pythagoreërs toe, wat wel niet veel zegt, maar wat er toch op wijst dat hij haar voor Euclides plaatst; bovendien is er een bekende passage bij Plato[30], waarin hij haar zeer waarschijnlijk bij zijn lezers volkomen bekend veronderstelt.*

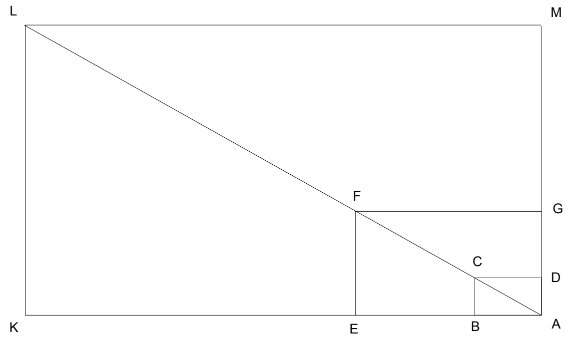
De bekendheid met deze theorie ten tijde van Plato wordt volgens Dijksterhuis

> *zeer aannemelijk gemaakt, doordat Proklos de theorie der zijde- en diagonaalgetallen juist ter sprake brengt naar aanleiding van den term "rationale diameter" en daarbij uitdrukkelijk zegt, dat het quadraat van den rationalen diameter één verschilt van het tweevoud van het quadraat van de zijde.*



De onderlinge onmeetbaarheid van de eenheid van lengte met de zijde van een vierkant van 3 oppervlakte-eenheden komt voor bij de eerder genoemde Theodorus van Cyrene. Dit kan er op duiden dat vóór Archimedes de lineaire transformatie van zijde- en diagonaalgetallen ook reeds toegepast is om een rationale benadering van √3 te vinden. Het kan in ieder geval eenvoudig toegepast worden op de rechthoekige driehoek waarmee Archimedes zijn proces van cirkelmeting mee begint. Een rechthoekige driehoek met een eenheid als rechthoekszijde (BC) en twee keer de eenheid als hypotenusa (AC) heeft een onmeetbare zijde als andere rechthoekszijde (AB). De verhouding van AB en BC is de irrationaliteit √3.

De procedure van vorming van zijde- en diagonaalgetallen, die we zojuist gezien hebben, kan ook op deze situatie losgelaten worden.



Van de rechthoek ABCD heeft AD de eenheid als lengte en AC=2AD.
AD wordt verlengd tot G zodat DG=AB. Evenwijdig aan AB wordt een lijn door G getrokken, die het verlengde van AC in F snijdt. Zo ontstaat rechthoek AEFG.

Op dezelfde manier is nu de rechthoek AKLM te vormen, waarbij de rechthoekszijde AM ten opzichte van AG verlengd is met een lijnstuk ter grootte van AE.
En zo zijn er telkens meer rechthoeken te vormen.

Noem de korte rechthoekszijde van de n^e rechthoek a_n en de bijbehorende lange zijde, ofschoon geen diagonaal, d_n. Eenvoudig is nu na te gaan, dat er geldt:

$$a_n=a_{n-1}+d_{n-1} \;,\quad d_n=3a_{n-1}+d_{n-1} \qquad (n>1)\text{, ofwel} \quad \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

[30]Het citaat waarmee deze paragraaf geopend is.

Ook hierbij is vanwege de meetkundige oorsprong van deze betrekkingen niet zonder meer over te gaan op twee rijen gehele of zelfs maar rationale getallen. Maar het is natuurlijk wel mogelijk om de dichtsbijzijnde gehele benaderingen te gebruiken. Meetkundig vertaald betekent dit dat de rechthoeken benaderd worden door parallellogrammen, die op den duur steeds meer op rechthoeken gaan lijken.

De bekeken suggesties zijn grofweg in twee groepen onder te brengen.

1. Een afgeleide van het Babylonische worteltrekken.
   Hieronder vallen de formule van Hunrath en Hultsch (H&H) en het afwisselend werken met rekenkundig en harmonisch gemiddelde en tussenliggende, zoals bijvoorbeeld door Henry is voorgesteld.

2. De lineaire transformatie (11), die we zowel tegenkomen in de arithmetische methode van Brahmagupta om de Pell-vergelijking op te lossen, als in het meer meetkundige algoritme van de zijde- en diagonaalgetallen.

De belangrijkste vertegenwoordiger van de eerste groep is de formule van H&H. Voor deze formule pleit vooral het feit dat zowel onder- als bovenbenadering in evenveel stappen (drie stappen uitgaande van a=2) berekend wordt.

In de Griekse wiskunde wordt de naam Archytas (428-365 v.Chr.) al in verband gebracht met de vorm $a \pm \frac{b}{2a}$. De vorm $a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$ is hier een betrekkelijk eenvoudige variatie op, maar er is geen enkele aanwijzing dat deze vorm ten tijde van Archimedes in gebruik was.
Formules op zich waren niet in zwang, laat staan variaties op formules. Er moet meer in termen van algoritmen gedacht worden, maar een variatie op een algoritme is aanzienlijk ondoorzichtiger.
Een ander meer esthetisch bezwaar is de wisselende wijze waarop het algoritme toegepast moet worden. Waarom zou Archimedes met de bovenbenadering a=2 begonnen zijn, om vervolgens de onderbenadering a=5 te nemen en te eindigen met de bovenbenadering a=26? Was hij bijvoorbeeld alleen uitgegaan van bovenbenaderingen, wat de formule op zich eenvoudiger maakt (alleen het min-teken wordt gebruikt), dan zou hij op heel andere waarden uitgekomen zijn:

$$a=2\ ,\ b=1 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{48} \sim 7$$

$$a=7\ ,\ b=1 \quad \rightarrow \quad \frac{45}{26} < \sqrt{3} < \frac{97}{56} \quad \rightarrow \quad \sqrt{9408} \sim 97$$

$$a=97\ ,\ b=1 \quad \rightarrow \quad \frac{2340}{1351} < \sqrt{3} < \frac{18817}{10864}$$

Weliswaar zijn de gevonden waarden nu wat onhandelbaar, maar het was voor Archimedes een koud kunstje, zoals ook veelvuldig uit de *Cirkelmeting* blijkt, om breuken op een geschikte wijze door eenvoudiger breuken te benaderen.

Van de tweede groep suggesties springt het algoritme van de zijde- en diagonaalgetallen eruit. Er zijn duidelijke aanwijzingen voor het gebruik hiervan ten tijde van Archimedes. Er zijn zelfs historici die dit algoritme evenals het Euclidisch algoritme toeschrijven aan de Pythagoreeërs. Het is aanschouwelijk meetkundig en vergeleken bij de besproken formules uiterst eenvoudig.
Als belangrijkste bezwaar ertegen geldt het feit dat onder- en bovenbenadering in een verschillend aantal stappen gevonden worden, respectievelijk in vijf en zes stappen vanaf de eerste benaderingen 1 en 2.

Een algoritme op basis van de lineaire transformatie (11) heeft met name vanwege de eenvoud mijn voorkeur boven de Babylonische variant als benaderingsmethode voor wortels, maar de vraag waar Archimedes' voorkeur naar uit ging blijft onbeantwoord.
Het zou natuurlijk mooi zijn wanneer beide groepen suggesties onder een noemer gebracht kunnen worden. Het lijkt echter onmogelijk om vanuit een betrekkelijk *eenvoudig* basisalgoritme zowel de formule van H&H als het algoritme van de zijde- en diagonaalgetallen af te leiden. Daarvoor verschillen de beide benaderingen te veel. Om twee belangrijke verschillen te noemen:

- Bij de lineaire transformatie (11) is één vorm uitgangspunt voor het berekenen van zowel onder- als bovenbenadering. De formule van H&H gebruikt twee verschillende vormen.

- De formule van H&H is niet als lineaire transformatie te schrijven. De formule wordt, bijvoorbeeld in het geval dat a een bovenbenadering is, dus als $b = a^2 - D$,

$$\frac{a^2-a+D}{2a-1} < \sqrt{D} < \frac{a^2+D}{2a}$$

Met $a = \frac{t_n}{n_n}$ *en* $D = 3$ levert dit als eerstvolgende onderbenadering

$$\frac{t_{n+1}}{n_{n+1}} = \frac{(a-1)t_n + 3n_n}{2t_n - n_n}$$

en als bovenbenadering $\frac{t_{n+1}}{n_{n+1}} = \frac{at_n + 3n_n}{2t_n}$,

dus respectievelijk de transformaties $\begin{pmatrix} a-1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, beide afhankelijk van

$a = \frac{t_n}{n_n}$.

Natuurlijk is het zo dat van beide methodes, bij herhaalde transformatie en juiste startwaarde van a, de uiteindelijke produktmatrices identiek zijn, immers ze leiden tot het zelfde resultaat. Maar het is duidelijk dat er geen sprake is van een eenvoudig en doorzichtig gemeenschappelijk algoritme.

Overeenkomst hebben beide methodes ook. Zo is er de waarde, die b in alle gevallen aanneemt bij toepassing van de formule van H&H: b=1 als a een bovenbenadering is en b=2 bij een onderbenadering. Dit komt overeen met de waarde van het augment bij de Pell-vergelijkingen (14).

Het rekenen met rekenkundig en harmonisch gemiddelde en tussenliggende is deels te herleiden tot de rij benaderingen (10) die door de kettingbreuk geleverd wordt. Daartoe moet de rij aangevuld worden met een aantal tussenliggenden, zodat hij er als volgt uit ziet.

$$\tfrac{3}{1}\quad \frac{1}{1}\quad \frac{2}{1}\quad \tfrac{3}{2}\quad \frac{5}{3}\quad \frac{7}{4}\quad \tfrac{12}{7}\quad \frac{19}{11}\quad \frac{26}{15}\quad \tfrac{45}{26}\quad \frac{71}{41}\quad \frac{97}{56}\quad \tfrac{168}{97}\quad \frac{265}{153}\quad \frac{362}{209}\quad \tfrac{627}{362}\quad \frac{989}{571}\quad \frac{1351}{780}\quad \tfrac{2340}{1351}\quad \frac{3691}{2131}\quad \frac{5042}{2911}\quad \tfrac{8733}{5042}\quad \frac{13775}{7953}\quad \frac{18817}{10864}$$

Noem de breuken van deze rij g_1, g_2, enzovoorts. De klein gedrukte breuken met uitzondering van de eerste zijn telkens de tussenliggende van de voorgaande twee. In deze rij zijn rekenkundig en harmonisch gemiddelde van g_1 en g_2 respectievelijk g_3 en g_4. Hiervan zijn op hun beurt g_6 en g_7 het rekenkundig en harmonisch gemiddelde, en g_{12} en g_{13} zijn het weer van g_6 en g_7. De breuk g_{14} is nu de tussenliggende van g_{12} en g_{13}. Ziehier C. Henry's onderbenadering. Zijn bovenbenadering blijft evenwel duister.

Van deze rij breuken komt iedere derde breuk overeen met de linker kolom van een macht van matrix M_1 (zie pag. 29). De daarop volgende breuk komt overeen met de rechter kolom, dus met

$$g_n = \frac{t_n}{n_n}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;,\; M_1^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \;,\; M_1^3 = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \;,\; \ldots\ldots \quad ofwel \quad M_1^n = \begin{pmatrix} t_{3n} & t_{3n+1} \\ n_{3n} & n_{3n+1} \end{pmatrix} \qquad n \in Z^+$$

Het Babylonische algoritme voor het benaderen van wortels, zoals besproken op blz. 14, levert als (boven)benaderingen resp. $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{97}{56}, \frac{18817}{10864}, \ldots\ldots$, telkens overeenkomend met de eerste kolom van M_1^{2k} $(k \in Z^+)$. De noemer en teller van deze breuken blijken namelijk te voldoen aan de Pell-vergelijking $t_k^2 - 3n_k^2 = 1$, en wel op een bijzondere manier. Als $\frac{t_k}{n_k}$ een benadering is van √3 dan is $\frac{3n_k}{t_k}$ het ook, zodat

$$\frac{t_{k+1}}{n_{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_k}{n_k} + \frac{3n_k}{t_k}\right) = \frac{t_k^2 + 3n_k^2}{2t_k n_k} \quad \Rightarrow \quad t_{k+1} = t_k^2 + 3n_k^2 \;\wedge\; n_{k+1} = 2t_k n_k$$

$$\Rightarrow \quad t_{k+1}^2 - 3n_{k+1}^2 = (t_k^2 - 3n_k^2)^2$$

Met andere woorden de benaderingen uit Mesopetamië schieten exponentieel door de oplossingen van de Pell-vergelijking heen.

Welnu, de cirkel is rond. In Archimedes' *Cirkelmeting* kwam de benadering van √3 uit de hemel vallen. Om de inslagkrater heen hebben we een rondtrekkende beweging gemaakt en we zijn feitelijk weer op het uitgangspunt aanbeland. Archimedes' werkelijke benaderingsmethode blijft in de wolken gehuld. De puzzel blijft onverminderd bestaan.
De ware les die het nageslacht uit Archimedes' leven en werk kan leren is wellicht niet de intensieve speurtocht naar oplossingen. Niet voortdurend het hoofd breken over wiskundige raadsels. Maar bij tijd en wijle een bad nemen. En dan geen cirkels en loodlijnen in het badschuim trekken, maar wegdromen naar de warme stranden van Griekenland of Sicilië. Misschien kunnen we beter Aphrodite verkiezen boven de Koningin der Wetenschappen, bij het frustrerende inzicht dat we de puzzel nog steeds niet hebben opgelost. Ik begin maar eens met een biertje.

Literatuur

C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton, New Yersey: Princeton University Press (1968)

C. Brezinsky, *History of Continued fractions and Padé Approximations*, Berlin: Springer-Verlag (1991)

F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Vol. I, (1928)

M. Cantor, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Band I, Aflage 3, Nachdruck (1907), New York: Johnson Reprint Corporation (1965)

W. Dunham, *Journey through Genius*, New York: Penguin Books (1990)

E.J. Dijksterhuis, *Archimedes* (1938), herdruk Princeton, New Yersey: Princeton University Press (1987)

E.J. Dijksterhuis, *Elementen van Euclides*, Groningen: Noordhoff (1929)

J. Fauvel, J.J. Gray, *The History of Mathematics: a Reader*, London: MacMillan Press & Open University Press (1988)

T. Heath, *History of Greek Mathematics*, vol II, Oxford: Oxford at the Clarendon Press (1921)

G.G. Joseph, *The Crest of the Peacock*, London: Penguin Books (1991)

M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press (1972)

M. Kline, *The Loss of Certainty*, New York: Oxford University Press (1980)

W.R. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston (1989)

D.E. Smith, *History of Mathematics*, vol II, New York: Dover (1923)

J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, dl VI, Berlin: Walter de Gruyter (1924)

B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin: Springer Verlag (1983)

B.L. van der Waerden, *Ontwakende Wetenschap*, Groningen: Noordhoff (1950)